

# APPUNTI DI TOPOGRAFIA E FOTOGRAMMETRIA

UNIVERSITÀ DI FIRENZE

CORSO LAUREA IN INGEGNERIA DELL'AMBIENTE E DELLE RISORSE

CORSO DI TOPOGRAFIA, GEODESIA, CARTOGRAFIA E FOTOGRAMMETRIA

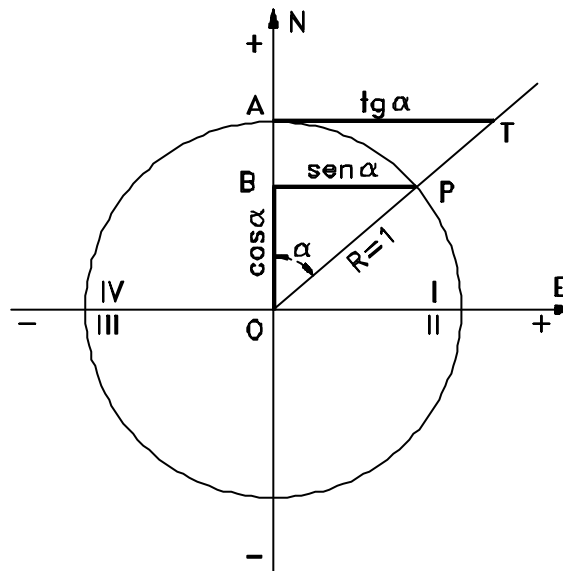
1 - TOPOGRAFIA

## 1.1 Preliminari

### 1.1.1 ANGOLI E SISTEMI DI MISURA

L'angolo è la porzione di piano delimitata da due semirette che hanno il punto di origine a comune (vertice); l'ampiezza di un angolo può essere espressa, in topografia, nei seguenti principali sistemi di misura:

- *Ciclotometrico o assoluto (radianti)*: la cui unità di misura è definita nel circolo trigonometrico (fig. 1.1) come l'angolo che sottende un arco di lunghezza pari al raggio.



**Fig. 1.1 - circolo trigonometrico convenzionale in topografia**

- *sessagesimale*: l'unità di misura (grado) è definita come la centottantesima parte dell'angolo piatto, le frazioni di grado sono il primo (sessantesima parte del grado) e il secondo (sessantesima parte del primo o tremilaseicentesima parte del grado)
- *sessadecimale*: l'unità di misura è coincidente con quella sessagesimale, mentre le frazioni di grado sono espresse con la convenzione decimale.
- *centesimale*: l'unità di misura (grado centesimale o gon) viene definita come la duecentesima parte dell'angolo piatto, e le frazioni di grado sono espresse con notazione decimale.

### 1.1.2 CONVERSIONI ANGOLARI

Nella tabella 1.I sono indicate le formule per il passaggio da un sistema di misura agli altri.

**Tab. 1.I - CONVERSIONI TRA I SISTEMI ANGOLARI**

| AL SISTEMA ⇒<br>DAL SISTEMA ↓ | CICLOMETRICO  | SESSADECIMALE   | SESSAGESIMALE  | CENTESIMALE   |
|-------------------------------|---|---|--|---|
| CICLOMETRICO                  | --  | $\alpha^{\circ} = \alpha^r \cdot 180^{\circ} / \pi$   | $\alpha^{\circ} = \alpha^r \cdot 180^{\circ} / \pi$<br>> frazioni orarie (*)   | $\alpha^g = \alpha^r \cdot 200^g / \pi$   |
| SESSADECIMALE                 | $\alpha^r = \alpha^{\circ} \cdot \pi / 180^{\circ}$   | --  | > frazioni orarie (*)  | $\alpha^g = \alpha^{\circ} \cdot 200^g / 180^{\circ}$   |
| SESSAGESIMALE                 | $\alpha^{\circ} = \alpha^{\circ} + p'/60 + s''/3600$<br>$\alpha^r = \alpha^{\circ} \pi / 180^{\circ}$ | $\alpha^{\circ} = \alpha^{\circ} + p'/60 + s''/3600$  | --   | $\alpha^{\circ} = \alpha^{\circ} + p'/60 + s''/3600$<br>$\alpha^g = \alpha^{\circ} \cdot 200^g / 180^{\circ}$ |
| CENTESIMALE                   | $\alpha^r = \alpha^g \cdot \pi / 200^g$   | $\alpha^{\circ} = \alpha^g \cdot 180^{\circ} / 200^g$ | $\alpha^{\circ} = \alpha^g \cdot 180^{\circ} / 200^g$<br>> frazioni orarie (*) | --  |

(\*) per ottenere la trasformazione della parte decimale in primi e secondi sessagesimali (frazioni orarie) si procede così:

- chiamando  $d$  la parte decimale dell'espressione sessadecimale si ha  $p = d \cdot 60$ , dove  $p'$ , la parte intera di  $p$ , fornisce il numero dei primi sessagesimali
- chiamando  $d'$  la parte decimale dei primi ( $d' = p - p'$ ) si ottengono i secondi con la  $s'' = d' \cdot 60$

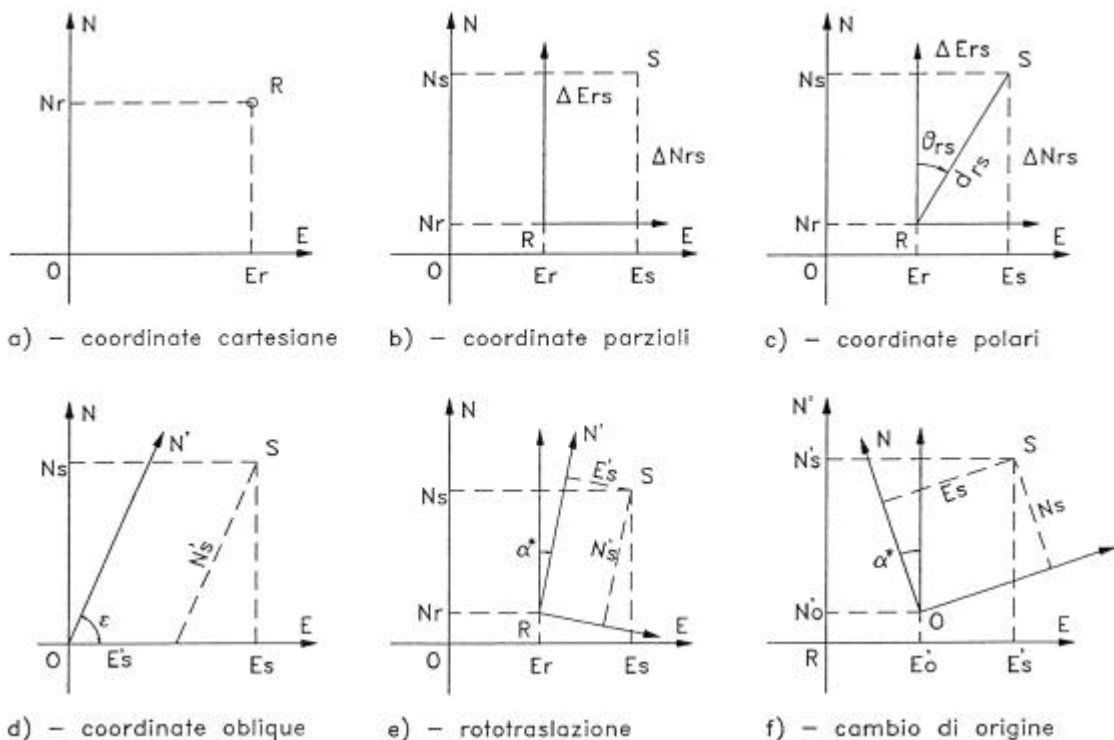
### 1.1.3 COORDINATE CARTESIANE

In topografia le coordinate cartesiane ortogonali mostrano una convenzione diversa da quelle impiegate in matematica, infatti l'asse delle ordinate (fig.1.2) viene identificato con la lettera  $x$ , mentre quello delle ascisse con la lettera  $y$ . La posizione di un punto  $R$  nel piano può essere allora essere indicata in modo biunivoco mediante la conoscenza delle coordinate (assolute)  $Nr$  e  $Er$ . Se il punto  $S$  è riferito ad una origine nota  $R$ , le sue coordinate parziali saranno indicate come incrementi di coordinate  $\mathbf{DNrs}$  e  $\mathbf{DErs}$ , mentre le coordinate cartesiane assolute di  $S$  saranno ottenute mediante le:

$$[1.1] \quad Ns = Nr + \mathbf{DNrs} ; \quad Es = Er + \mathbf{DErs}$$

mentre, note le coordinate assolute dei punti  $S$  e  $R$ , risulta facile calcolare le coordinate parziali:

$$[1.2] \quad \mathbf{DNrs} = Ns - Nr ; \quad \mathbf{DErs} = Es - Er$$



**Fig.1.2 - Sistemi di riferimento piani**

#### 1.1.4 COORDINATE POLARI

La posizione di un punto S del piano può essere riferita ad un punto noto R anche mediante (fig. 1.2c) la lunghezza della congiungente  $drs$  (distanza) e l'angolo formato da questa con le ordinate  $qrs$  misurato in senso orario positivo (angolo di direzione). Note le coordinate polari del punto S riferito a R, è semplice calcolarne le coordinate cartesiane parziali:

$$[1.3] \quad \mathbf{DNrs} = drs \cdot \cos \mathbf{qrs} \quad ; \quad \mathbf{DErs} = drs \cdot \sin \mathbf{qrs}$$

e, considerando le [1.1], le coordinate cartesiane assolute:

$$[1.4] \quad Ns = Nr + drs \cdot \cos \mathbf{qrs} \quad ; \quad Es = Er + drs \cdot \sin \mathbf{qrs}$$

la ricerca delle coordinate polari, note le cartesiane, si realizza mediante le [1.2], per cercare eventualmente le cartesiane parziali e poi mediante le:

$$[1.5] \quad \mathbf{qrs} = \arctg \frac{\Delta Ers}{\Delta Nrs} \quad ; \quad drs = \frac{\Delta Ers}{\sin \mathbf{qrs}}$$

avendo cura di sommare al risultato della prima delle [1.5] un angolo piatto se il denominatore è negativo o un angolo giro se il risultato è negativo.

#### 1.1.5 PROBLEMI SULLE COORDINATE

- *coordinate cartesiane oblique*: con riferimento alla fig. 1.2-d, nel caso in cui siano note le coordinate cartesiane oblique  $N's$  e  $E's$  e l'angolo  $e$ , si possono ottenere le coordinate ortogonali con le:

$$[1.6] \quad Ns = N's \cdot \sin e \quad ; \quad Es = E's + N's \cdot \cos e$$

- *rototraslazione di coordinate*: Se sono note le coordinate cartesiane ortogonali di un punto S, relative ad un sistema con origine in un punto noto R, e ruotato (in senso orario positivo) di un angolo  $a^*$  (fig. 1.2-e), si possono ottenere le coordinate assolute riferite all'origine O mediante le:

$$[1.7] \quad \begin{aligned} Ns &= Nr + N's \cdot \cos a^* - E's \cdot \sin a^* \\ Es &= Er + N's \cdot \sin a^* + E's \cdot \cos a^* \end{aligned}$$

Nel caso invece (fig. 1.2-f) in cui siano note le coordinate della origine O e del punto S riferite ad un sistema con origine in R e ruotato di un angolo orario positivo  $a^*$  rispetto al sistema cartesiano XY nel quale si vogliono esprimere le coordinate di S (problema del cambio di origine), si possono impiegare le:

$$[1.8] \quad \begin{aligned} Ns &= (N's - N'o) \cdot \cos a^* - (E's - E'o) \cdot \sin a^* \\ Es &= (N's - N'o) \cdot \sin a^* + (E's - E'o) \cdot \cos a^* \end{aligned}$$

## 1.2 Strumenti topografici

Le misure topografiche sono costituite principalmente da:

- angoli (azimutali se giacciono in un piano orizzontale o zenitali se giacciono su un piano verticale)
- distanze (inclinate, orizzontali oppure chiamate dislivelli se misurate lungo la verticale).

### 1.2.1 ELEMENTI FONDAMENTALI

Gli strumenti topografici, dotati di precisioni molto variabili, e quindi di caratteristiche costruttive altrettanto differenziate, sono caratterizzati dalla presenza di componenti sensibili alla attrazione gravitazionale e tali da consentire un corretto posizionamento dello strumento durante le operazioni di misura:

#### Fig. 1.3 - livella torica

- *livelle* - ampole di vetro (di forma sferica o torica) riempite parzialmente di liquido, servono a determinare una retta, o un piano, orizzontali e possono raggiungere in questa operazione precisioni notevoli (da diversi primi ad alcuni decimi di secondo sessagesimale). La caratteristica di precisione di una livella è espressa dalla sensibilità  $s$  definita come rapporto tra la rotazione dell'asse della livella LL e lo spostamento corrispondente della bolla d'aria (solitamente posto eguale a 2mm). Con riferimento a fig. 1.3:

$$[1.9] \quad s = a/t$$

La precisione nella orizzontalità del piano (o della verticalità di uno strumento) ottenibile con una determinata livella torica può essere calcolata in funzione della sensibilità e dell'errore  $e_c$  di centramento della bolla:

$$[1.10] \quad p'' = s \times e_c$$

dove se  $s$  è espresso in ["/mm],  $e_c$  deve essere espresso in [mm]. Per questa ragione, negli strumenti che necessitano di un controllo molto spinto della orizzontalità (o verticalità), si impiegano metodi di lettura della bolla "a coincidenza", tali da ridurre  $e_c$  a pochi decimi di mm.

Una livella torica si dice *rettificata* quando il piano d'appoggio PP' risulta parallelo all'asse della livella LL (fig. 1.4c), per verificarne la correttezza, ovvero l'assenza di un errore  $e$  (fig. 1.4a), sarà sufficiente invertire la posizione della livella sul piano d'appoggio (fig. 1.4 b), infatti un eventuale errore  $e$  viene evidenziato in quantità raddoppiata e può essere eliminato agendo per metà sul piano d'appoggio (PP') e per metà sulle viti di rettifica della livella.

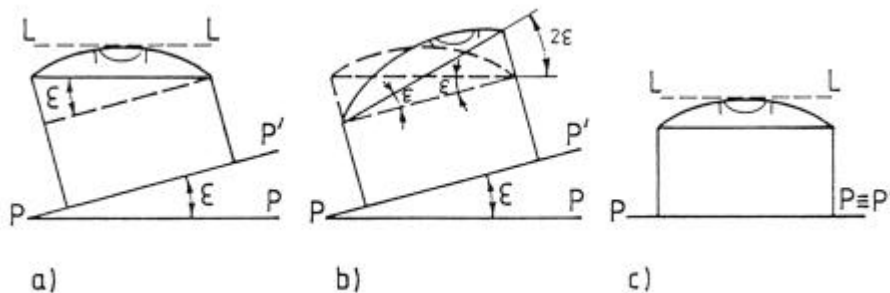
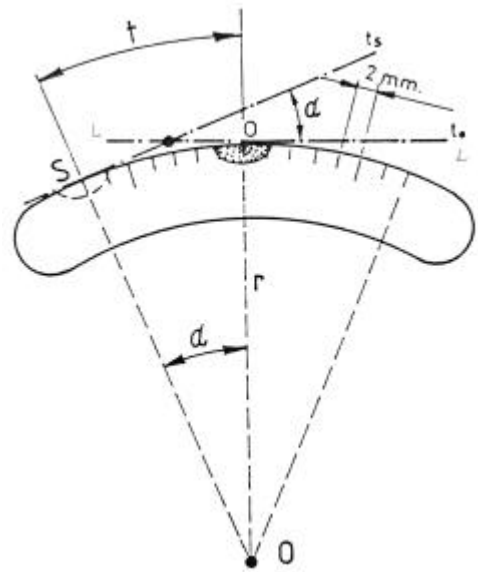


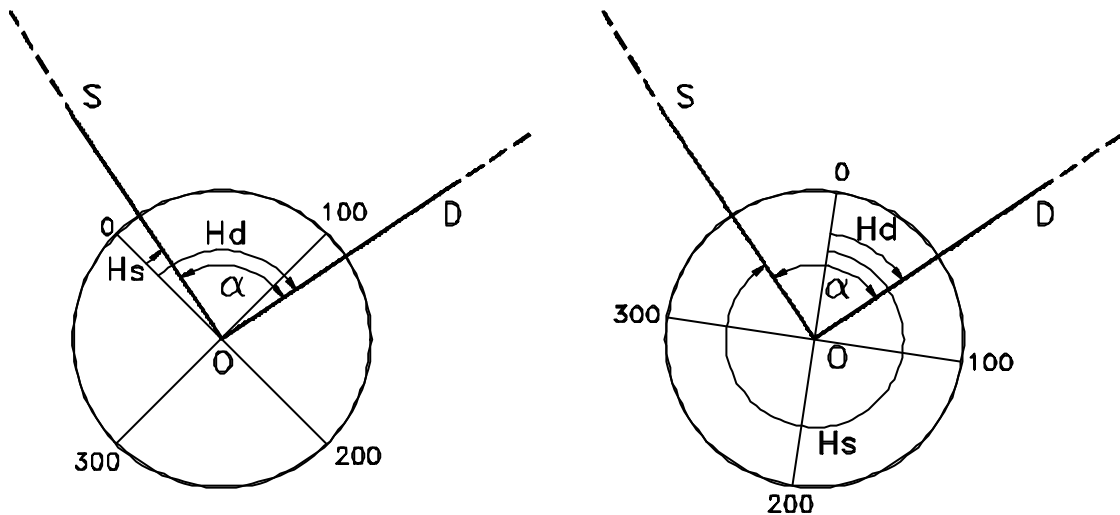
Fig. 1.4 - rettifica della livella torica

### 1.2.2 STRUMENTI PER LE MISURE ANGOLARI:

Gli angoli possono essere misurati con strumenti (goniometri) di precisione molto variabile, generalmente la formula che consente di ottenere l'ampiezza di un angolo può essere espressa con la:

$$[1.11] \quad \alpha = Hd - Hs$$

con riferimento dei simboli alla fig. 1.5 e considerando che i punti S e D si succedono in senso orario, cioè S sta alla sinistra di D. Se il risultato è negativo (ciò avviene se e solo se lo 0 del cerchio ricade all'interno dell'angolo considerato) come in fig.1.5 b, si aggiunge un angolo giro.



a)  $\alpha = Hd - Hs$

b)  $\alpha = Hd - Hs + 400^g$

**Fig. 1.5 - Misura dell'angolo formato da due direzioni OS e OD**

- *bussola topografica* - strumento costituito da un ago magnetico ruotante liberamente su un perno situato al centro di un cerchio graduato orientabile, sul quale scorre un indice collegato ad un traguardatore. Generalmente è dotato di una livella sferica che consente di disporre la bussola in piano per una maggiore accuratezza delle misure. Gli angoli formati dalla direzione considerata con il Nord magnetico vengono detti Azimut magnetici e possono essere riportati su una carta quando sia nota la declinazione magnetica  $D$ : angolo formato dal Nord magnetico con quello geografico (astronomico). La conoscenza di  $D$  può essere ottenuta con l'approssimazione di alcuni primi sessagesimali nelle zone non soggette ad anomalie, mediante la seguente:

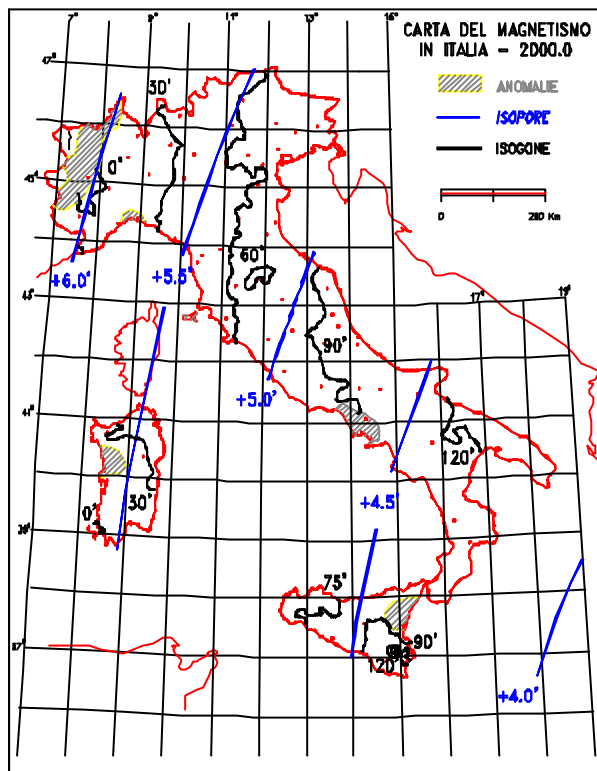
$$[1.12] \quad D = D_{00} + DT Va + Vd$$

dove  $D_{00}$  è la declinazione magnetica al 1.1.2000 (isogone in fig. 1.6a)

$DT$  è il tempo trascorso dal 1.1.2000 espresso in anni e relative frazioni decimali

$Va$  è la variazione secolare annua (isopore di fig. 1.6a)

$Vd$  è la variazione diurna ricavabile dai grafici mensili (fig. 1.6b).



VARIAZIONE DIURNA DELLA DECLINAZIONE MAGNETICA

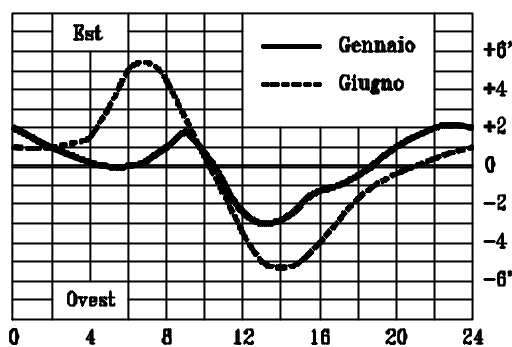


Fig. 1.6 - Variazioni del magnetismo in Italia: le linee isogone uniscono punti di equal declinazione, le linee isopore quelli di equal variazione media annua

ad esempio a Firenze il 01.06.04 alle ore 15:00 la declinazione sarà:

$$D = +60 + 4.5 \cdot 5.3 - 4 = +80'$$

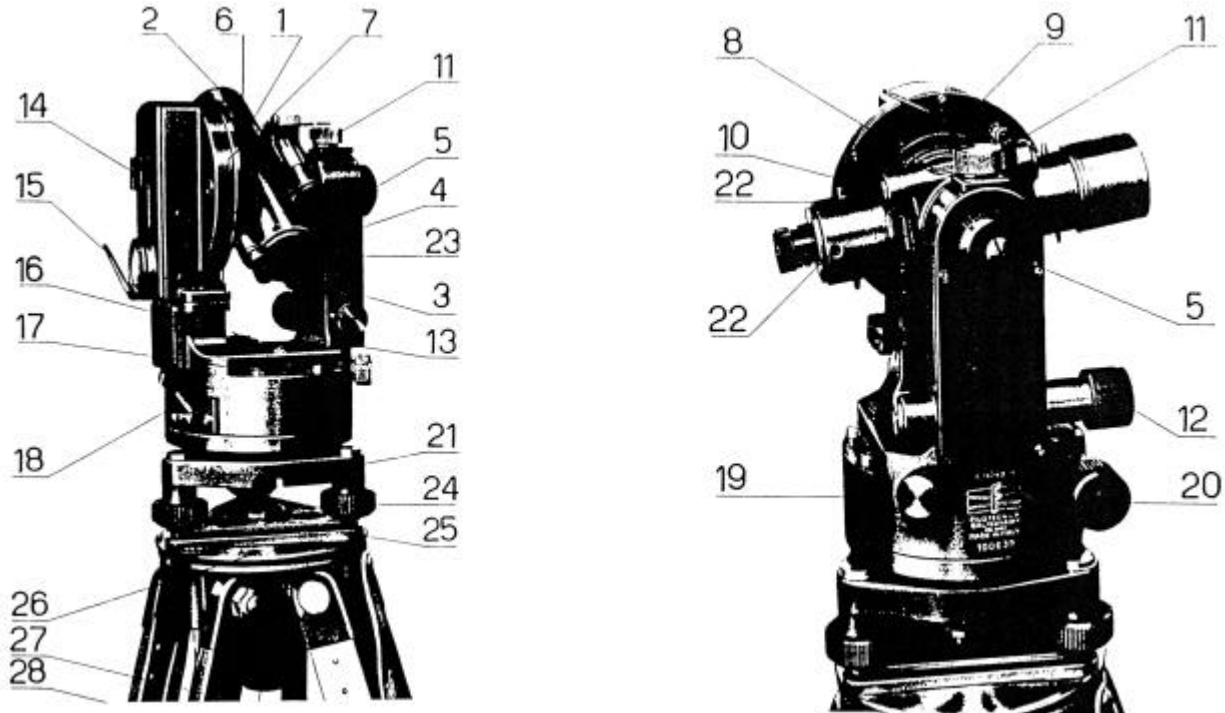
essendo:  $D_{00} = +60'$  ;  $DT = 4.5a$  ;  $Va = +5.3'$  ;  $Vd = -4'$

Con la bussola topografica si possono misurare, oltre agli azimut magnetici anche angoli (anche come differenza di azimut), la precisione generalmente non supera il grado sessagesimale e quindi lo strumento è adatto soprattutto al rilievo speditivo o preliminare (redazione di eidotipi).

*tacheometro e teodolite* – l'esigenza di misurare angoli azimutali e zenitali con precisione sempre più accentuata ha determinato una evoluzione tecnologica che, iniziata nel secolo scorso, ha raggiunto il suo culmine alla metà del '900, originando goniometri sempre più precisi e tali da consentire comodità e rapidità nella esecuzione delle misure. Tradizionalmente i goniometri moderni vengono ancora classificati come *tacheometri e teodoliti*, indicando nei primi quegli strumenti che, più rapidi nell'impiego, non raggiungono precisioni molto elevate (di solito si arriva al primo centesimale) e nei secondi gli strumenti di più elevata precisione (generalmente al secondo sessagesimale o anche al decimo di secondo). In realtà le particolarità costruttive che differenziavano tacheometri e teodoliti si sono andate un po' attenuando, pur mantenendosi le differenze in termini di precisione.

La lettura ai cerchi, che impiegava micrometri ottici di diverso modello (e generalmente non molto semplici da impiegare) sono ormai sostituiti da sistemi di lettura elettronica dei cerchi (mediante encoders differenziali – vedi par.1.2.4) che sono graduati con sistemi simili al codice a barre. Le letture (fig.1.11), sono riportate su display digitali e possono essere memorizzate e/o trasmesse via cavo ad elaboratori esterni.

**Fig. 1.7 - principali elementi costitutivi di un goniometro ottico-meccanico**



**LEGENDA**

- |   |   |   |
|---|---|---|
| 1. Canocchiale  | 11. Bottone d'arresto del movimento in elevazione del canocchiale                                 | 21. Base triangolare  |
| 2. Obiettivo del canocchiale                                      | 12. Bottone di richiamo in elevazione   | 22. Vite di rettifica del reticolo del cannocchiale   |
| 3. Oculare del canocchiale  | 13. Alidada   | 23. Piastra di chiusura e di bloccaggio del porta reticolo  |
| 4. Microscopio di lettura dei cerchi graduati                     | 14. Sede per l'applicazione del declinatore magnetico e del lampadino di illuminazione dei cerchi | 24. Vite d'orizzonte  |
| 5. Bottone per il focamento                                       | 15. Specchio orientabile per l'illuminazione dei cerchi graduati                                  | 25. Piastra d'appoggio sulla testa del treppiede  |
| 6. Mirino del cannocchiale  | 16. Livella sferica   | 26. Treppiede   |
| 7. Scatola di protezione del cerchio verticale                    | 17. Blocchetti di appoggio del dispositivo di serraggio in custodia                               | 27. Vitone per il fissaggio dello strumento al treppiede  |
| 8. Livella sul canocchiale per l'uso dello strumento come livello | 18. Leva di orientamento del cerchio  | 28. Cinghia con tappo filettato da avvitare sul vitone per proteggere la filettatura, quando lo strumento non è montato sul treppiede |
| 9. Specchio per l'osservazione della livella 8                    | 19. Bottone di arresto del movimento azimutale  |   |
| 10. Tappo di chiusura del congegno di rettifica della livella 8   | 20. Bottone di richiamo del movimento azimutale   |   |

Un goniometro, per il corretto funzionamento, deve soddisfare alcune condizioni di esattezza (con riferimento alla fig. 1.8):

- l'asse principale Z-Z di rotazione dell'alidada deve essere verticale
- l'asse secondario Y-Y di rotazione del cannocchiale deve essere orizzontale e incidente con l'asse Z-Z
- l'asse di collimazione X-X deve essere perpendicolare all'asse Y-Y e incidente con esso e con l'asse Z-Z nello stesso punto O detto centro dello strumento
- i cerchi graduati devono essere montati in modo che l'asse del cerchio azimutale coincida con Z-Z e quello del cerchio zenitale con Y-Y
- le graduazioni dei cerchi devono essere esatte

**Fig. 1.8 - schema geometrico di un goniometro**

Per controllare se uno strumento soddisfa le condizioni suesposte, una volta posto in stazione curando bene la verticalità dell'asse Z-Z, si possono effettuare letture ai cerchi collimando a punti ben identificati e tali da consentire un centramento molto preciso, dopo aver annotato le letture su un registro, si capovolge il cannocchiale e, ruotata l'alidada di un angolo piatto, si ripete a ritroso la serie di collimazioni precedente (questa procedura prende il nome di "regola di Bessel"). In ciascuna coppia di letture così ottenute collimando nelle due posizioni (coniugate) ad uno stesso punto devono valere, a meno di errori accidentali di collimazione e di lettura ai cerchi, le relazioni:

$$[1.13] \quad H'' = H' \pm 200^g$$

$$[1.14] \quad V'' = 400^g - V'$$

dove l'angolo piatto è riportato nel sistema centesimale (oramai quasi universalmente impiegato nella graduazione dei cerchi). I valori più probabili delle letture saranno ottenuti quindi come media aritmetica delle due misure coniugate riportate alla prima:

$$[1.15] \quad H = (H' + H'' \pm 200^g) / 2$$

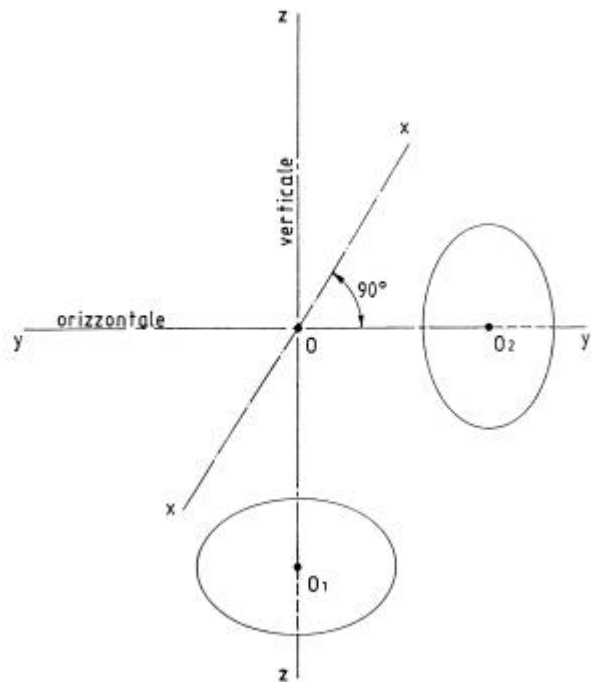
$$[1.16] \quad j = (V' - V'' + 400^g) / 2$$

La regola di Bessel consente di eliminare l'influenza sulle misure degli errori di:

- orizzontalità dell'asse secondario;
- ortogonalità dell'asse di collimazione con l'asse secondario;
- eccentricità dell'asse di collimazione;
- eccentricità dell'alidada (con il cerchio orizzontale);
- eccentricità del cerchio zenitale (con l'asse secondario);
- rettifica dell'indice zenitale (la collimazione allo Zenit dovrebbe valere zero).

Si capisce quindi che il suo impiego risulta indispensabile per il corretto impiego di tutti quegli strumenti (prevalentemente i teodoliti) che hanno caratteristiche di precisione tali da risentire delle pur minime imperfezioni di costruzione (o di manutenzione).

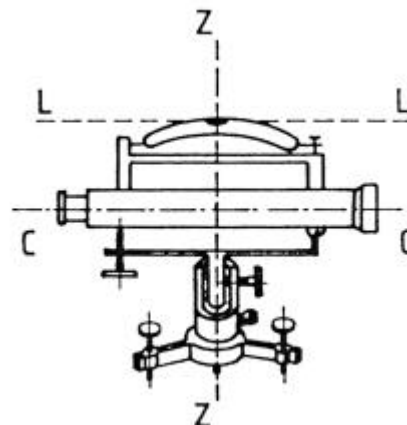
Le misure angolari di precisione, dovendo tener conto degli errori accidentali di lettura e di quelli sistematici di graduazione del cerchio, vengono ripetute più volte, con l'accortezza di ruotare, ad ogni coppia di misure coniugate, il cerchio di una predeterminata quantità (metodo della reiterazione): il valor medio delle diverse misure fornirà il valore più probabile dell'ampiezza dell'angolo misurato.



### 1.2.3 STRUMENTI PER LA MISURA DEI DISLIVELLI:

I dislivelli possono essere misurati anche con i goniometri completi, anzi in taluni casi è indispensabile il loro impiego, ma per la determinazione di precisione delle differenze di quota tra punti sono stati ideati, e nel tempo perfezionati, strumenti appositi.

- *Livelli* - Si tratta di strumenti nei quali il cannocchiale non può ruotare in senso zenitale (se non di piccolissime quantità per la messa in stazione), spesso privi anche del cerchio orizzontale sono impiegati per le sole determinazioni altimetriche. Le condizioni di esattezza per questi strumenti (fig. 1.9) si riducono a due:



**Fig. 1.9 - disegno schematico di un livello con vite di elevazione**

- l'asse principale Z-Z di rotazione della traversa (così prende nome l'alidada) deve essere verticale
- l'asse di collimazione C-C deve essere parallelo all'asse della livella L-L e quindi orizzontale.

**Tab. 1.II - CLASSIFICAZIONE PER ORDINE DI PRECISIONE E PER STRUMENTAZIONE ACCESSORIA DELLE LIVELLAZIONI**

| Precisione media                               | 5 ÷ 20 mm / Km  | 2 ÷ 5 mm / Km   | ± 1 mm / Km  |
|--|---|---|--|
| <b>attrezzatura di misura</b>                  | livello <i>da cantiere</i><br>cannocchiale 15 - 30 x<br>stadia di legno | livello o autolivello<br><i>da ingegneria</i><br>cannocchiale 30-35 x<br>stadia metallica                 | livello <i>di alta precisione</i><br>dotato di livella torica letta a<br>coincidenza con<br>s = 8-10 " / 2 mm<br>cannocchiale 40-45 x<br>mira con nastro invar<br>letta con micrometro |
| <b>Materializzazione dei punti</b>             | centrini infissi nel terreno  | caposaldi orizzontali infissi o murati con centrino a testa sferica o caposaldi verticali di forma torica | caposaldi a testa sferica di materiale inossidabile e di adeguato diametro murati e protetti   |
| <b>metodo di rilievo</b>                       | livellazione da un estremo o dal mezzo                                  | livellazione reciproca o dal mezzo  | livellazione dal mezzo (o reciproca)   |
| <b>distanza massima tra strumento e stadia</b> | ÷ 50 m  | ÷ 30 m  | 20 ÷ 25 m  |

Le precisioni che si possono conseguire dipendono, oltre che dalle caratteristiche del livello, dalla materializzazione dei punti, dalla mira (vedi par. 1.3.) impiegata, dalle condizioni morfologiche del terreno e da quelle ambientali, nonché dalla metodica di rilievo. In tab. 1.II sono indicate le principali caratteristiche dei livelli e delle attrezzature, classificate in funzione della precisione ottenibile che è espressa mediante l'errore medio Kilometrico (scarto quadratico medio dell'unità di peso) la cui unità di misura è in mm di dislivello su km percorsi. Tra gli accessori più importanti va segnalato il micrometro a lamina pian parallela per la lettura della stadia che consente di apprezzare fino al centesimo di millimetro.

La maggior parte dei livelli da ingegneria (e anche da cantiere) di recente costruzione non utilizza più la livella torica, ma un compensatore automatico, che consente una discreta precisione nella orizzontalità dell'asse di collimazione ( $\pm 1''$ ) quando sia centrata la livella sferica. Commercialmente questi strumenti sono chiamati autolivelli o livelli automatici. Esistono anche livelli automatici di alta precisione.

- *Altimetri* - Quando i punti di cui si vuol determinare la quota siano dispersi su superfici ampie e non si necessiti di elevata precisione (qualche decimetro), si può ricorrere ad attrezzature che determinano i dislivelli attraverso le variazioni relative della pressione atmosferica, cioè attraverso barometri di vario genere che, quando siano graduati in metri vengono chiamati altimetri.

La relazione tra dislivello, pressione barometrica  $p$ , temperatura atmosferica  $t$ , latitudine geografica  $j$ , tensione di vapore  $f$  e umidità relativa  $U$  può essere espressa dalla formula di Laplace:

$$[1.17] \quad D_{ab} = a b c d \log (p_a/p_b)$$

dove:  $a = 18400 (1.00157 + 0.00367 t_m)$

$$b = 1 / (1 - 0.378 f_m / p_m)$$

$$c = 1 + 0.00259 \cos 2j_m$$

$$d = 1 + (2 Q_a + D_{ab}) / 6371104$$

$$f = f_{max} U / 100$$

dove l'indice  $m$  vuole significare la media dei valori misurati nei punti,  $f_{max}$  e  $U$  possono essere dedotti in base al diagramma psicrometrico e alle temperature lette sullo psicrometro che deve accompagnare il barometro. Per attenuare l'influenza degli errori strumentali di solito si utilizzano 2 o 3 barometri in stazione fissa e altrettanti in stazione ambulante sui punti incogniti.

#### 1.2.4 STRUMENTI DI MISURA ELETTRONICI

A partire dagli anni '70 la principale innovazione nel settore degli strumenti di misura impiegati in topografia ha riguardato l'introduzione delle tecnologie elettroniche e informatiche. Tale evoluzione è tuttora in rapido sviluppo per cui non è possibile prevedere le applicazioni che verranno approntate a medio o a lungo termine.

**Tab.1.III - APPARATI DISTANZIOMETRICI ELETTRICO-OTTICI**

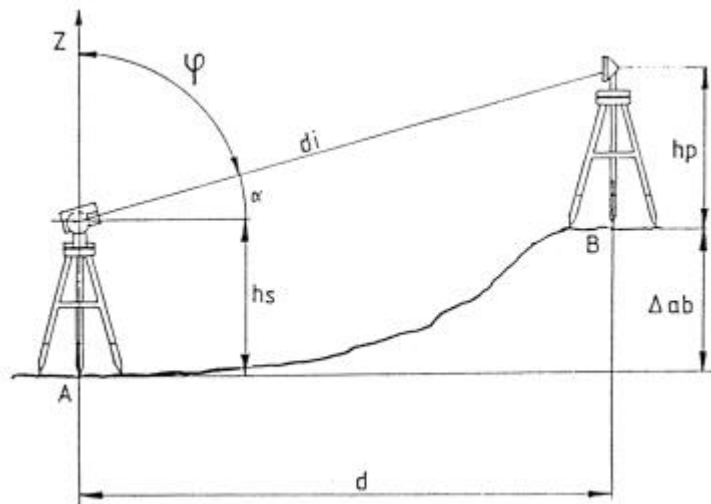
| tipologia dell'apparato di misura       | portata massima                         | precisione assoluta  | errore relativo         |
|---|---|--|-------------------------|
| <b>a raggi infrarossi (diodo GaAs)</b>  | 1 Km con 1 prisma<br>5 Km con 6 prismi  | $\pm 1 - 5 \text{ mm} +$<br>$1 - 5 \text{ mm} / \text{Km}$   | $2 - 5 \cdot 10^{-6}$   |
| <b>laser a impulsi senza riflettore</b> | da 100 a 500 m                          | 0.8 - 50 mm  | $10^{-4} - 10^{-5}$     |
| <b>laser a impulsi con riflettore</b>   | 2-3 Km con 1 prisma                     | 2 mm + 2 mm/Km   | $\sim 3 \cdot 10^{-6}$  |
| <b>tellurometri laser (Elio -Neon)</b>  | 5 Km con 1 prisma<br>50 Km con 6 prismi | $\pm 1 - 2 \text{ mm} +$<br>$0.2 - 2 \text{ mm} / \text{Km}$ | $0.4 - 4 \cdot 10^{-6}$ |

- *Distanziometri elettro-ottici* - sono entrati per primi, in modo massiccio, nel mercato i distanziometri elettro-ottici che utilizzano raggi infrarossi modulati per la determinazione della distanza tra lo strumento e un prisma riflettente (fig. 1.10). Dapprima montati sopra goniometri ottico-meccanici, sono poi stati integrati evitando i problemi connessi alla non coassialità del distanziometro all'asse di collimazione.

Successivamente si sta diffondendo rapidamente la misura di distanze senza l'impiego di stazioni riflettenti, e questa rappresenta la principale novità nel panorama delle innovazioni tecnologiche riferite alla topografia di questi ultimi anni. La misura di distanza avviene con l'impiego di impulsi laser (con lunghezza d'onda e intensità controllate in modo da non dare luogo a problemi per la salute degli occhi degli operatori) emessi dallo strumento e che vengono riflessi dagli oggetti rilevati (edifici, ma anche terreno, vegetazione compatta,...) e interpretati in modo da poter stabilire

la distanza dell'oggetto collimato. Talvolta si associano anche misure radar che rendono le misure di distanza più precise (laser-radar ranging). La misura è rapida e può avere precisioni interessanti (da  $\pm 0.8\text{mm}$  a  $5\text{ cm}$ ) con portate utili assai variabili (da  $10$  a  $2500\text{ m}$ ) in funzione della strumentazione impiegata, ma anche della riflettività dell'oggetto su cui si trova il punto collimato.

Ancora più potenti, ma più costosi e quindi meno diffusi sul mercato i tellurometri a laser. In tab. 1.III vengono riportati i campi operativi e le caratteristiche di precisione di questi strumenti.



**Fig. 1.10 - schema di funzionamento di un distanziometro elettro-ottico con prisma riflettente**

Per quanto riguarda il calcolo della distanza orizzontale e del dislivello si hanno le:

$$[1.18] \quad d = di \sin j = di \cos a$$

$$[1.19] \quad D_{ab} = di \cos j + hs - hp = d \operatorname{tga} + hs - hp$$

dove  $j$  è l'angolo zenitale formato appunto dalla distanza con lo Zenit (verticale ascendente) e  $a$  il suo complementare (angolo di inclinazione). Se la distanza eccede i  $150\text{m}$  si deve aggiungere alla [1.19] il termine correttivo degli errori di sfericità e rifrazione espresso nel paragrafo 1.4

- *Stazione totale* – L'applicazione di circuiti elettronici alla lettura dei cerchi graduati ha determinato un ulteriore sviluppo tecnologico e di mercato (a partire dagli anni '80). I goniometri di questa generazione hanno assunto il nome commerciale di "stazione totale", più propriamente definibili come *goniometri ottico-meccanici con lettura totalmente elettronica dei cerchi e della distanza*. La lettura dei cerchi avviene mediante la "codifica" di questi (una specie di codice a barre) e con l'uso di circuiti chiamati "encoders" (fotodetettori). I valori medi di più misurazioni sono visualizzati su un *display* quasi in tempo reale (fig. 1.11).

|     |    |         |      |    |         |
|-----|----|---------|------|----|---------|
| STD | P0 | 18:13   | STD  | P0 | 18:13   |
| HA: |    | 96.3240 | HA:  |    | 96.3240 |
| VA: |    | 98.5790 | VA:  |    | 98.5790 |
|     |    |         | SD:  |    | 64.400  |
| STD | P0 | 18:13   | STD  | P0 | 18:13   |
| HA: |    | 96.3235 | N :  |    | 3.715   |
| HD: |    | 64.384  | E :  |    | 64.277  |
| UD: |    | 1.437   | ELE: |    | 1.437   |

**Fig. 1.11 – display di stazione totale**

La presenza di segnali digitali di lettura degli angoli azimutali e zenitali e, simultaneamente, della distanza inclinata, ha reso possibili ulteriori sviluppi, soprattutto per quanto riguarda il "software" integrato negli strumenti. Sono oramai diffusi apparecchi programmabili dall'operatore (fig. 1.12). e capaci di interagire (mediante collegamento seriale) con i micro-computers portatili, o tali da fornire in tempo reale le coordinate dei punti rilevati, le quote dei punti sovrastanti (altezze di

gronda, di elettrodotti..), di fornire la distanza tra il prisma riflettente e un punto di coordinate note (picchettamento), oppure anche di mostrare sul display grafico il disegno del rilievo eseguito.



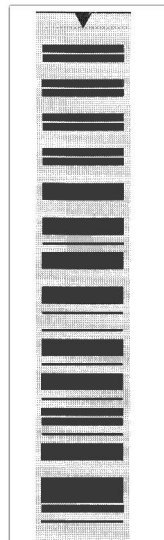
**Fig. 1.12 – display e tastiera di stazione totale**

Ulteriori evoluzioni delle “stazioni totali” sono segnalate nel settore degli strumenti capaci di orientarsi automaticamente (mediante servomotori e collegamento radio) sul prisma e di comunicare i risultati via etere o via cavo ad elaboratori elettronici portatili o fissi.

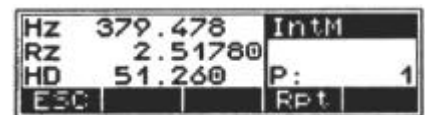
- *Livelli digitali* – (fig.1.13) Una codifica simile, in linea di principio, a quella dei cerchi può essere applicata anche alle scale lineari delle stadia (fig. 1.14) e un livello automatico dotato di “encoders”(fig. 1.15)., legge la stadia fornendo su display la distanza orizzontale ( $\pm 1$  cm) e l’altezza della collimazione sul piede della stadia ( $\pm 0.1$  mm o anche meno). In altri casi il livello è sostituito da un raggio laser rotante in un piano orizzontale e la stadia è dotata di un “lettore” che fornisce l’altezza della intersezione col piano.



**Fig. 1.13 - livello dotato di lettura digitale della stadia**



**Fig. 1.14 – stadia graduata con codice a barre**



Hz= lettura azimutale

Rz= lettura alla stadia

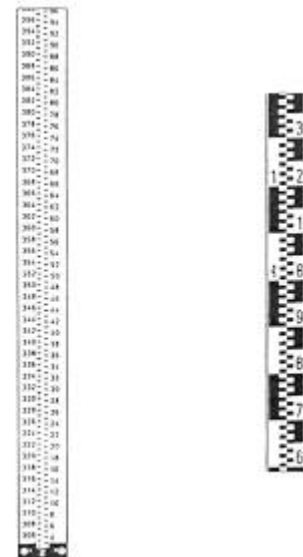
HD= distanza orizzontale

**Fig. 1.15 – display di un livello digitale**

### 1.2.5 APPARATI E METODI DI MISURA INDIRETTA DELLA DISTANZA

- *Stadia e cannocchiale distanziometrico* - La *stadia* o *mira* (fig. 1.16) è uno strumento molto semplice, costituito generalmente da un’asta metallica o di legno graduata, eventualmente ripiegabile per il trasporto, lunga da 1 a 4 m. Per le livellazioni di precisione si utilizzano mire con graduazione su nastro metallico in lega invar, più adatte alla lettura con micrometro a lamina pian parallela.

**Fig. 1.16 - stadiе graduate:  
a sinistra mira con nastro invar per livellazioni di precisione  
a destra stadia pieghevole per rilievo tacheometrico**

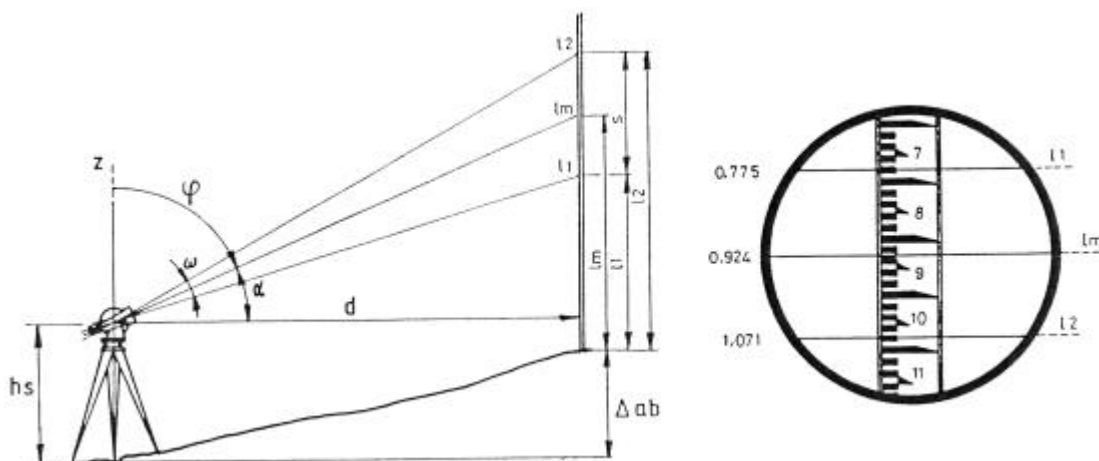


Per la misura della distanza la stadia verticale è stata impiegata in modo massiccio a partire dalla metà dell'800 insieme al cannocchiale distanziometrico, fino ad essere oramai sostituita dai più rapidi e precisi distanziometri elettro-ottici. Tralasciando le dimostrazioni del teorema di Reichebach e l'impiego degli oramai obsoleti cannocchiali astronomici, le formule per il calcolo della distanza e del dislivello (fig. 1.17) risultano:

$$[1.20] \quad d = K (l_2 - l_1) \operatorname{sen}^2 \mathbf{j} = K s \operatorname{sen}^2 \mathbf{j}$$

$$[1.21] \quad \mathbf{D}_{ab} = K s \operatorname{sen} \mathbf{j} \cos \mathbf{j} + h_s - l_m$$

dove  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_m$  sono le letture alla stadia effettuate col cannocchiale sulla stadia in corrispondenza ai tre fili del reticolo distanziometrico,  $s$  è la differenza tra  $l_2$  e  $l_1$  e  $K$  è una costante fornita dal costruttore dello strumento (solitamente di valore 100) che dipende dall'apertura dell'angolo parallattico  $\omega$ .

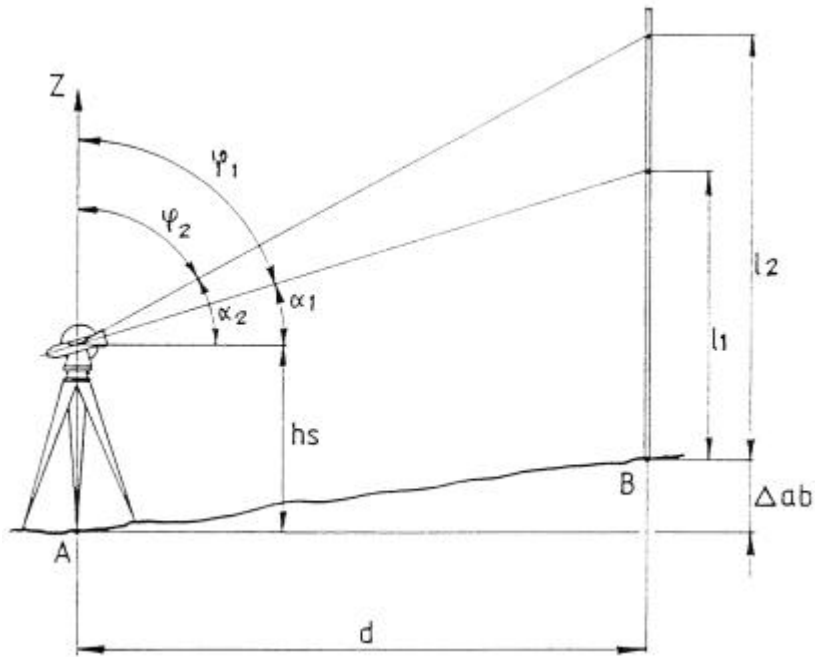


**Fig. 1.17 - misura della distanza e del dislivello con cannocchiale distanziometrico e stadia verticale**

- *Stadia orizzontale e metodi ad angolo parallattico variabile* - La misura delle distanze con la stadia verticale può essere effettuata anche se non si dispone di un cannocchiale distanziometrico, sarà sufficiente collimare a due punti della stadia (possibilmente abbastanza distanti) e leggere l'angolo zenitale  $\varphi$  (o il suo complementare  $\alpha$  detto angolo di inclinazione la cui tangente è definita come pendenza e indicata con il simbolo  $p$ ) in corrispondenza di ciascuno di essi (fig. 1.18):

$$[1.22] \quad d = \frac{l_2 - l_1}{\cot \mathbf{j}_2 - \cot \mathbf{j}_1} = \frac{l_2 - l_1}{\operatorname{tg} \mathbf{a}_2 - \operatorname{tg} \mathbf{a}_1} = \frac{l_2 - l_1}{p_2 - p_1}$$

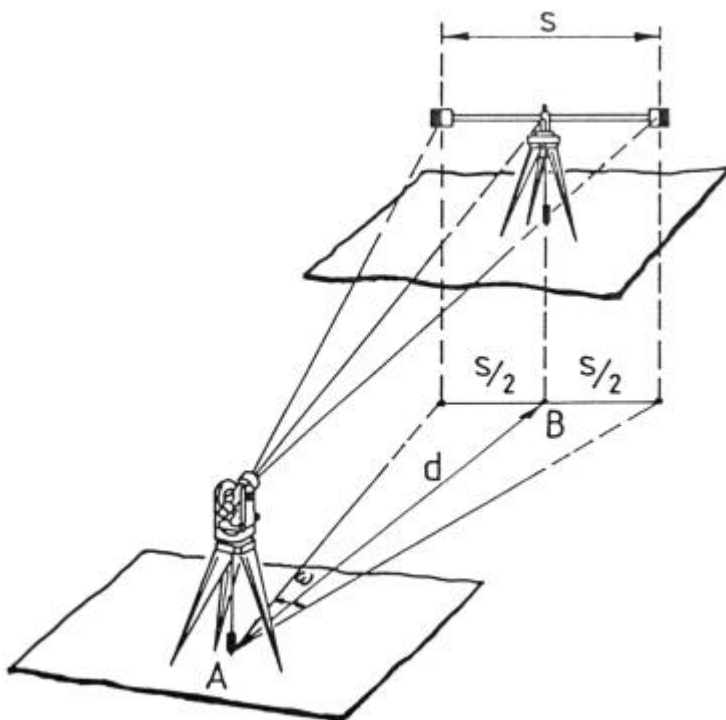
nella quale l'ultima espressione è particolarmente adatta all'impiego del clisimetro (goniometro con il cerchio zenitale graduato in  $\operatorname{tg} \alpha$ ).



**Fig. 1.18 - misura della distanza con angolo parallattico variabile e stadia verticale**

Per ricavare misure di distanze brevi ( $20 \div 50\text{m}$ ) con buona precisione ( $0.2 \div 0.5 \text{ mm}$  corrispondenti a un e.r.  $10^{-5}$ ) si può impiegare, con un buon teodolite, una stadia orizzontale (fig. 1.19) invar (solitamente di lunghezza  $2 \pm 0.00002 \text{ m}$ ):

$$[1.23] \quad d = \frac{s}{2} \cot g \frac{w}{2}$$



Questo metodo, oramai poco utilizzato, mantiene una sua validità nei rilievi di particolari architettonici eseguiti da stazioni collegate con centramento forzato, ove siano necessarie precisioni millimetriche (ad esempio per la determinazione dei punti di appoggio per un rilievo fotogrammetrico, oppure nelle triangolazioni tecniche: vedi par. 1.3).

**Fig. 1.19 - misura della distanza con angolo parallattico variabile e stadia orizzontale**

### 1.3 Rilievo altimetrico

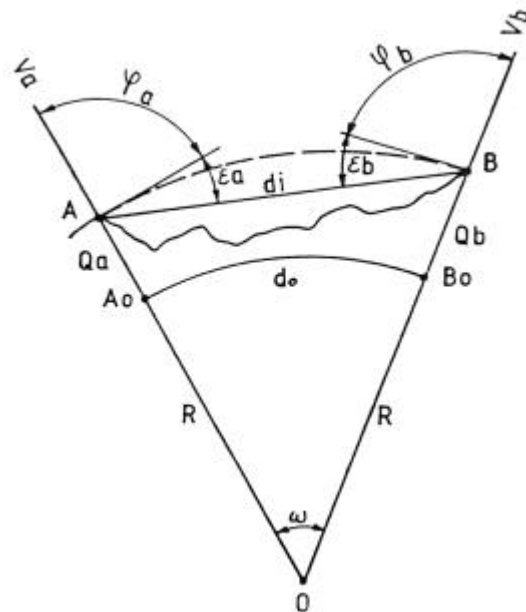
#### 1.3.1 LIVELLAZIONI TRIGONOMETRICHE

Oltre al rilievo planimetrico (ricerca della posizione della proiezione dei punti sulla superficie di riferimento) la topografia si occupa della misura delle quote (distanze dei punti dal geode). Si parla in questo caso di rilievo altimetrico: non sempre le procedure di rilievo e gli strumenti impiegati per le due operazioni coincidono, generalmente si parla di rilevamento planialtimetrico solo nelle operazioni di dettaglio (vedi par. 1.4).

Le quote (*ortometriche*) sono riferite al geode (par. 1.5) mediante la determinazione sperimentale di punti di questa superficie (misura del livello medio del mare con mareografi) collegate con misure di dislivelli *ortometrici* (misure di differenze di quota effettuate con scale metriche lungo linee verticali). Quando i dislivelli sono misurati con teodoliti, si parla di livellazioni trigonometriche.

La precisione ottenibile con questo metodo è molto variabile, in dipendenza dall'accuratezza delle misure angolari zenitali e dalla distanza di misura (l'errore viene posto generalmente in relazione al quadrato di quest'ultima), dovendosi comunque valutare le altezze strumentali, raramente l'errore assoluto può essere inferiore al mm, e può raggiungere, su lunghe distanze, anche il valore di alcuni dm.

**Fig. 1.20 - livellazione trigonometrica con osservazioni zenitali reciproche**



- *Con misure zenitali reciproche* - Nota la lunghezza  $d_o$  (fig. 1.20) della geodetica che congiunge le proiezioni dei punti A e B sulla sfera locale (la distanza massima può arrivare eccezionalmente ai 10 Km, ma di norma è limitata a pochi Km), si misurano gli angoli zenitali apparenti  $\varphi_a$  e  $\varphi_b$ , alterati rispettivamente di  $\epsilon_a$  e  $\epsilon_b$  per effetto della rifrazione atmosferica. Il dislivello  $\Delta_{ab}$  sarà:

$$[1.24] \quad \Delta_{ab} = d_o (1 + Qm/R) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_b - \varphi_a)$$

valida per osservazioni zenitali simultanee (operate in condizioni ambientali circa costanti). Al  $\Delta_{ab}$  calcolato con la [1.24] deve essere aggiunto il termine  $h_a - h_b$  che tiene conto delle altezze dei centri degli strumenti sui punti A e B rispettivamente.

- *Da un estremo* - Quando non sia conveniente o possibile operare con osservazioni reciproche, si può calcolare il dislivello anche con la sola osservazione zenitale da un estremo, in questo caso si ha:

$$[1.25] \quad D_{ab} = d_o (1 + Qm/R) \operatorname{cotg} j_a + (1-K) \frac{d^2}{2R} + h_a - h_b$$

che diviene identica alla [1.19] quando si sia determinata con un distanziometro la distanza inclinata  $di$ . Nella [1.25] compare il coefficiente di rifrazione atmosferica  $K$ , la cui entità varia, nelle ore prossime al mezzogiorno quando è più stabile e assume un valore minimo, tra 0.10 e 0.14, nel periodo estivo in Italia. La determinazione sperimentale di  $K$  può essere effettuata mediante un raffronto tra le [1.25] e le [1.24], cioè quando si sia operata una misurazione con letture zenitali reciproche simultanee:

$$[1.26] \quad K = 1 - [\operatorname{tg}^{1/2}(\mathbf{j}_b - \mathbf{j}_a) - \operatorname{cotg} \mathbf{j}_a] 2R / d^2$$

nella quale  $d = do(1 + Qm/R)$  è la distanza orizzontale alla quota media del rilievo (esprimibile anche come  $d = di \operatorname{sen} \mathbf{j}_a$ )

### 1.3.2 LIVELLAZIONI GEOMETRICHE

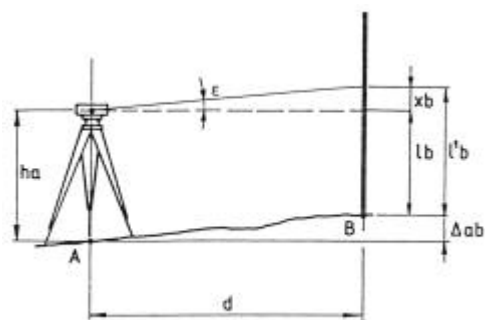
Nel par.1.2 si sono esaminati gli strumenti per la misura dei dislivelli, in particolare abbiamo visto i livelli: apparecchi idonei a stabilire linee di collimazione orizzontali. Le misure di dislivelli operate con questi strumenti e con apposite mire prendono il nome di livellazioni geometriche.

Nella Tab.1.II sono elencati i diversi tipi di livelli e le precisioni ottenibili nelle misure dei dislivelli per unità di percorso orizzontale (Km), vedremo come questi risultati debbano essere posti in relazione con le metodologie operative.

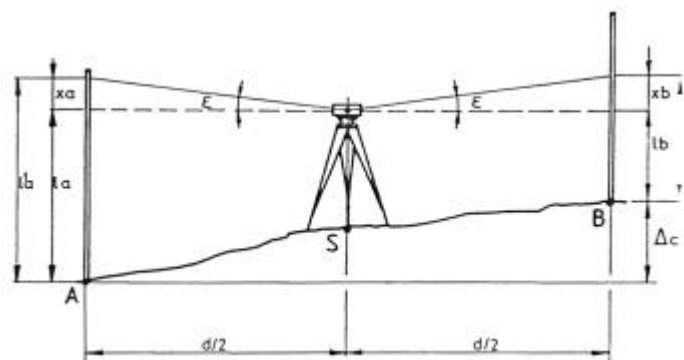
- *Con stazione da un estremo* - In fig. 1.21 vediamo lo schema di una livellazione geometrica operata facendo stazione sul punto A e ponendo una mira graduata in posizione verticale sul punto B. A meno di un errore  $x_b$  dovuto ad una inclinazione  $\epsilon$  dell'asse di collimazione (errore sistematico se dovuto ad una scorretta rettifica o altrimenti accidentale), il dislivello è dato dalla:

$$[1.27] \quad \Delta_{ab} = h_a - l_b$$

data la imprecisione generalmente inevitabile nella misura di  $h_a$ , la possibile influenza di errori dovuti alla sfericità e alla rifrazione e la impossibilità di eliminare l'eventuale errore sistematico  $\epsilon$ , questo metodo è impiegato per determinazioni di modesta precisione.



**Fig. 1.21 - livellazione geometrica da un estremo**



**Fig. 1.22 - livellazione geometrica dal mezzo**

- *Con stazione dal mezzo* - Se il punto di stazione S (fig. 1.22) viene spostato in modo da risultare circa equidistante dagli estremi A e B, si parla di livellazione dal mezzo. In questo caso gli errori  $x_a$  e  $x_b$ , dovuti ad un eventuale errore residuo di rettifica dell'asse di collimazione assumono egual valore e vengono eliminati perché di segno opposto nel calcolo del dislivello:

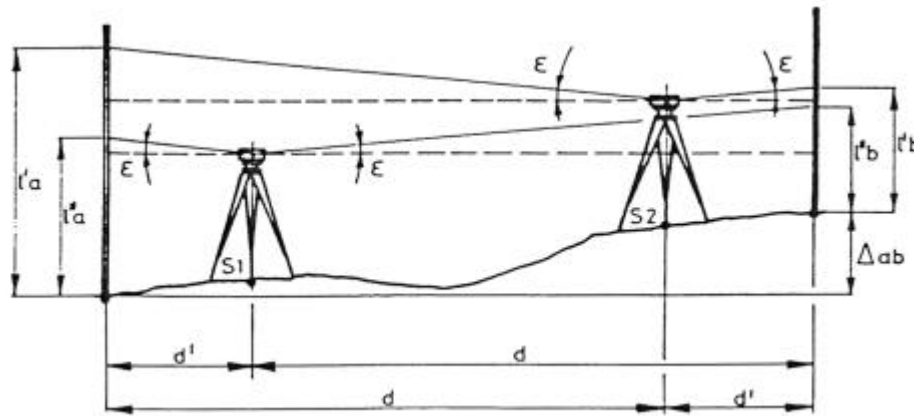
$$[1.28] \quad \Delta_{ab} = l'_a - l'_b = l_a + x_a - l_b - x_b = l_a - l_b$$

allo stesso modo vengono eliminati gli effetti di rifrazione atmosferica e di sfericità della terra e l'imprecisione dovuta alla misura dell'altezza strumentale, inoltre viene dimezzata la distanza tra lo strumento e la mira con conseguenti benefici per la precisione di lettura e per la limitazione dell'influenza della componente accidentale dell'errore  $\epsilon$ . Per queste ragioni questa prassi operativa è fortemente raccomandabile per le determinazioni di alta precisione.

- *Con stazioni reciproche* - Quando non sia possibile operare con stazione dal mezzo, si può applicare la metodica di Porro, illustrata in fig. 1.23 e che consiste nella effettuazione di due stazioni poste nei pressi degli estremi A e B. Il dislivello risulta:

$$[1.29] \quad \mathbf{D}_{ab} = (l'_a + l''_a)/2 - (l'_b + l''_b)/2$$

e anche in questo caso risulta corretto dall'influenza di eventuali errori residui di rettifica e dagli effetti della sfericità e della rifrazione. Misurando il dislivello  $\Delta_{ab}$  con questa metodica e poi dal mezzo, si può verificare l'esistenza di un eventuale errore sistematico di inclinazione dell'asse di collimazione  $e$ .



**Fig. 1.23 - livellazione geometrica reciproca**

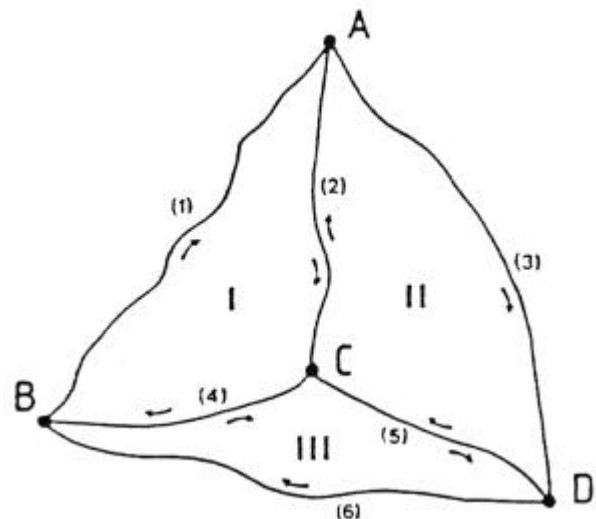
- *Iperdeterminazioni* - Soprattutto nelle determinazioni di precisione è indispensabile verificare l'attendibilità delle misure, per questa ragione le linee di livellazione (composte anche da molti dislivelli elementari) vengono solitamente "chiusure" mediante una misurazione a ritroso (andata e ritorno) operando secondo regole codificate nella Guida alla progettazione e alla esecuzione delle livellazioni geometriche (Firenze, 1975) alla quale si rimanda per ulteriori dettagli. Se invece si vogliono collegare altimetricamente più di 2 punti, è conveniente stabilire una pluralità di percorsi (fig. 1.24) connessi in una rete i cui anelli (indicati con numeri romani in figura) sono sottoposti alla condizione che la somma dei dislivelli lungo il loro percorso dia come somma zero. Se questa condizione è verificata entro le tolleranze prestabilite (vedi par. successivo), allora si può effettuare una compensazione delle misure che fornirà i valori più probabili delle quote dei punti e la loro approssimazione (s.q.m.).

**Fig. 1.24 - rete di linee di livellazione**

- *Tolleranze* - Se lungo un percorso si vuole conseguire una determinata precisione altimetrica si stabilirà l'errore medio chilometrico  $e$  corrispondente (precisione media in tab. 1.II) e la tolleranza da rispettare risulterà:

$$[1.30] \quad t = 3 e \sqrt{L}$$

dove  $L$  rappresenta la lunghezza del percorso espressa in Km.



## 1.4 Rilievo planimetrico

Il rilievo è una fase operativa costituita da una serie di operazioni di misura che consentono, mediante le fasi successive di restituzione analitica, grafica e di ricognizione, di produrre la rappresentazione grafica dell'oggetto (mappa topografica). Le esigenze di precisione del rilievo dipendono soprattutto dalla scala di rappresentazione di quest'ultima e dall'errore di graficismo (vedi cap. 2). Generalmente l'errore ammesso nel disegno cartografico può arrivare a 0.2 mm, per cui, chiamato  $D$  il denominatore di scala della mappa, l'errore ammissibile nella conoscenza delle coordinate di un punto è dato dalla:

$$[1.40] \quad e = 0.0002 D \text{ [m]}$$

ad esempio: se la mappa topografica ha un rapporto di scala 1:2000,  $e$  varrà 0.4m, cioè 40 cm.

### 1.4.1 MATERIALIZZAZIONE DEI PUNTI

In dipendenza dalle dimensioni dell'area, del numero di punti rilevati e dalla loro precisione, nonché dalla strumentazione impiegata, le operazioni di misura possono essere eseguite in una sola sessione di misure, oppure richiedere interventi ripetuti nel tempo, se poi il rilievo è soggetto ad aggiornamenti anche in epoche abbastanza distanti, allora si pone il problema della materializzazione dei punti di stazione e di segnalizzazione di alcuni punti rilevati, tali da consentire la ripresa delle operazioni di misura o la loro ripetibilità nel tempo.

- *Segnali temporanei e permanenti* - La segnalazione di un punto deve soddisfare a 3 esigenze:

a - visibilità dai punti di stazione circostanti: il segnale deve avere dimensioni tali da formare un angolo visuale sufficiente ad essere individuato (circa 90") ed essere colorato in modo tale da risaltare con evidenza (generalmente bianco e rosso alternati). La dimensione  $s$  del segnale può essere calcolata con la:

$$[1.41] \quad s = I d 90'' / 206265''$$

dove  $d$  è la distanza di osservazione e  $I$  è l'ingrandimento angolare dello strumento impiegato per la ricerca del segnale ( $I=1$  per la visione ad occhio nudo).

b - precisione di centramento o di collimazione: in dipendenza dalla distanza  $d$  tra i punti e dalla precisione angolare  $e$  che si vuole conseguire, si può ricavare l'entità dell'errore massimo nella materializzazione del punto e mediante la:

$$[1.42] \quad e = e' d / 206265'' = e^{cc} d / 636620^{cc}$$

c - stabilità e reperibilità nel tempo: in base alle esigenze di conservazione nel tempo dei segnali si possono utilizzare:

- chiodi, paline o picchetti di legno o metallici per segnali provvisori
- paloni, capre di collimazione, centrini murati o pilastri metallici per i segnali semipermanenti
- pozzetti in muratura con centrini inossidabili o pilastri in cemento armato per i segnali permanenti.
- *Centramento forzato* - Quando si debbano raggiungere elevate precisioni angolari con distanze di collimazione relativamente brevi, la [1.42] fornisce valori di  $e$  inferiori o molto inferiori a 1mm, in questi casi si utilizzano attrezzature provvisorie o semipermanenti che consentono il posizionamento dei segnali, o alternativamente degli strumenti di misura, su pilastro o su treppiede, con adeguata precisione. Tali attrezzature, molto varie per soluzioni meccaniche, prendono il nome di apparecchiature per il centramento forzato.

#### 1.4.4 RILIEVO REGOLARE E DI DETTAGLIO

L'insieme delle misure atte a determinare, con la dovuta precisione (vedi [1.40]) le coordinate dei punti che verranno rappresentati in scala (1:D) sulla mappa topografica, prende il nome di rilievo di dettaglio. In questa fase operativa il risultato, in termini di precisione, non può prescindere dagli errori commessi in precedenza, durante le fasi che hanno consentito di determinare le coordinate dei punti di stazione (rilievo di inquadramento), pertanto strumenti e metodi andranno individuati all'interno di un procedimento di *progettazione del rilievo* nel suo complesso.

- *Celerimensura* - Fino a pochi anni fa il rilievo celerimetrico veniva eseguito con il tacheometro (la celerimensura infatti veniva chiamata anche tacheometria con identità di significato e differenze puramente etimologiche) e con la stadia verticale. Nel tempo si erano rese di comune impiego, oltre alle attrezzature, anche alcune regole di esecuzione quali i collegamenti tra stazioni o le cosiddette poligonali celerimetriche. Trattandosi di prassi operative consolidate, anche a livello di linguaggio, e che trovano ancora impiego, ne daremo una descrizione.

Anzitutto la buona riuscita di un rilievo di dettaglio dipende dalla cura posta nella redazione dell'eidotipo, nella identificazione dei punti rilevati su questo elaborato e dall'ordine con cui viene tenuto il libretto delle misure, nonché ovviamente dall'esattezza delle stesse. Senza questa premessa infatti in fase di restituzione non sarà possibile identificare con certezza il particolare del terreno (casa, fosso, strada,..) cui ciascun punto si riferisce.

Il *collegamento tra stazioni* è una operazione il cui risultato consiste nel trasferimento della conoscenza delle coordinate e dell'orientamento da una stazione ad un'altra. Tale trasferimento può avvenire direttamente ponendo lo strumento in B, visibile da A, note le coordinate polari  $d_{ab}$  e  $q_{ab}$ , si calcolano le coordinate di B ([1.4]) e, notando che il  $q_{ba} = q_{ab} \pm 200g$ , si può imporre in B l'orientamento del cerchio, facendo sì che alla collimazione verso A corrisponda la lettura sul cerchio orizzontale di entità pari a  $q_{ba}$ : in questo modo tutte le altre direzioni misurate in B risulteranno orientate. Se i punti A e B non risultano reciprocamente visibili si può egualmente eseguire il collegamento (in questo caso detto di Porro) rilevando almeno 2 punti P e Q, visibili sia da A che da B: calcolate le coordinate di questi punti partendo dalla stazione A, si può calcolare anche l'angolo di direzione  $q_{pq}$  ([1.5]); similmente, partendo da B e con orientamento sull'asse N' disposto casualmente, si possono ricavare, in questo riferimento "fittizio", le coordinate dei punti P e Q e quindi l'angolo  $q'_{pq}$ . La differenza tra  $q_{pq}$  e  $q'_{pq}$ , che viene chiamata comunemente "disorientamento" della stazione B e indicata con  $a_b^*$ , rappresenta la quantità da aggiungere a tutte le direzioni misurate in B per ottenere gli angoli di direzione corretti. Noto l'orientamento delle congiungenti BP e BQ, essendo state misurate le distanze, si possono infine calcolare (in doppio modo per controllo) le coordinate di B.

- *Rilievo con stazioni totali* – L'evoluzione degli strumenti topografici di misura ha comportato:

- incremento delle portate distanziometriche (da 100 m a 1 Km)
- riduzione dei tempi di misura (da 60 a 600 punti/ora)
- migliori precisioni angolari (da 1-2° a 5-20'')
- possibilità di registrazione automatica dei dati di misura
- possibilità di elaborazione analitica e grafica interattiva

sono quindi superate le problematiche relative ai collegamenti tra stazioni o alla portata utile dello strumento, mentre insorgono nuove esigenze, quali l'influenza degli errori di sfericità e rifrazione nelle misure dei dislivelli ([1.25]) o la riduzione delle distanze alla superficie di riferimento (vedi cap.2).

- *Registrazione automatica dei dati di misura* - Il registro di campagna e l'eidotipo, risultato delle operazioni di misura celerimetriche, tendono ad essere sostituiti mediante tecnologie informatiche: infatti una stazione totale ha al suo interno un microprocessore simile (a volte identico) a quello di un

Personal Computer (PC), per cui è possibile stabilire un “dialogo”, cioè il trasferimento dei dati angolari e distanziometrici rilevati, dallo strumento al PC. Finora ci sono pochi esempi di elaboratori adatti a sopportare le condizioni operative di un rilievo topografico (calore, umidità, polvere, scuotimento durante il trasporto, difficoltà di alimentazione elettrica), si preferisce quindi utilizzare una unità intermedia di memoria (su scheda magnetica o su moduli di altro genere), che può essere integrata anche nello strumento stesso e in grado di “contenere” i dati che poi saranno “riversati” con appositi programmi sul PC per la elaborazione analitica (con programmi di calcolo) e grafica (con programmi di editing grafico e su carta mediante plotter).

Un altro problema aperto dall'impiego di queste tecnologie è la sostituzione dell'eidotipo, ovvero il collegamento tra i punti (identificati con una sigla o con un numero) e i particolari morfologici del rilievo (case, recinzioni, strade, ecc..). La tendenza attuale, mutuata dalla cartografia numerica (vedi cap.2) è di "codificare" i punti (dotarli cioè di un codice di riferimento che ne identifichi la natura, ad es. 101 = casa ; 102 = strada ; ....) e di raggruppare in ordine sequenziale i punti che rappresentano uno stesso particolare.

#### 1.4.5 RILIEVO PER POLIGONAZIONE

Si chiama poligonale il rilievo di una serie di punti collegati da una linea spezzata, aperta o chiusa, della quale si misurano le lunghezze dei lati e le ampiezze degli angoli (destrorsi) da questi formati.

Questo metodo di rilievo ha ricevuto un forte impulso dalla evoluzione tecnologica degli strumenti di rilievo, infatti gli incrementi di portata, precisione e rapidità di impiego di questi, nonché il sempre più diffuso impiego di mezzi elettronici per l'elaborazione dei dati di misura, consente di ottenere risultati, in termini di precisione, di notevole interesse pratico, soprattutto per reti di inquadramento di medie dimensioni.

- *Poligonal di inquadramento* - Le poligonal in questo caso possono essere riferite ad un sistema cartografico (Cap. 2) e si dicono “orientate”. Perché un rilievo sia “collegato” ad un sistema di riferimento, almeno due punti di esso devono avere coordinate note. Se i lati eccedono il campo topografico si dovranno operare le riduzioni alla corda e al piano conforme.

Il risultato del rilievo per poligonazione è la conoscenza delle coordinate dei vertici, che potranno poi essere impiegati come punti di stazione per il rilievo di dettaglio, in questo caso la poligonale viene detta “di inquadramento” del rilievo.

- *Poligonal aperte e chiuse* - Da un punto di vista morfologico le poligonal si possono suddividere (fig. 1.31) in:

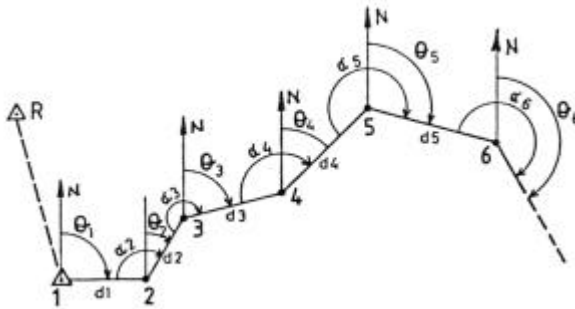
- *aperte;*
- *chiuse;*
- *di forma complessa.*

**Fig. 1.31 - poligonali: classificazione morfologica**

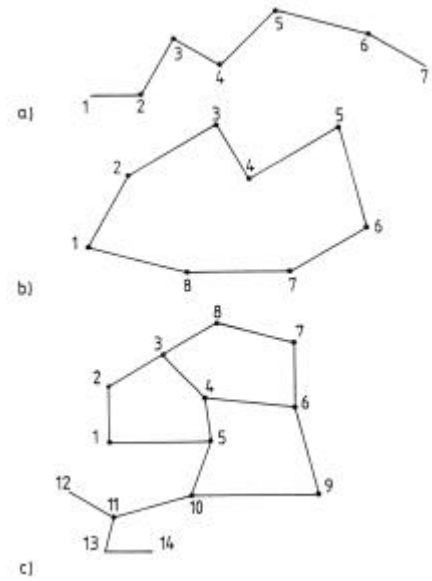
- a) - aperta
- b) - chiusa
- c) - rete di poligonali

mentre dal punto di vista del calcolo si preferisce suddividerle in base alle eventuali iperdeterminazioni (fig. 1.32), e cioè:

- senza controllo
- a controllo parziale (solo angolare o solo lineare)
- a controllo totale (angolare e lineare)
- connesse in rete con controllo multiplo



**Fig. 1.32 - poligonale orientata. Convenzione sulla misura degli angoli**



Le poligonali di forma “semplice” hanno i vertici che vengono identificati mediante una numerazione araba sequenziale continua in base a un senso di “percorrenza” univoco del tracciato, come vedremo questa convenzione semplificherà le notazioni formali del calcolo. I lati avranno lunghezze  $d_i$  (fig. 1.32), dove con l’indice  $i$  si intende il “nome” del primo vertice del lato (si sottintende il secondo indice riferito al vertice  $i+1$ ). In tutte le poligonali gli angoli misurati devono essere “destrorsi”, ciò significa che l’angolo è la rotazione oraria positiva da imporre ad un lato per coincidere con il successivo (fig. 1.32) l’indice  $i$  dell’angolo  $\alpha_i$  è riferito al “nome” del suo vertice.

Per poter calcolare l’angolo di direzione di tutti i lati di una poligonale, è necessario conoscere (o imporre) la direzione del primo lato ovvero l’orientamento della stazione effettuata nel vertice 1, del quale devono essere note anche le coordinate. Se la poligonale non è “orientata”, si possono assegnare valori arbitrari o nulli alle coordinate del vertice 1 e si pone generalmente  $q_1$  uguale a  $100^\circ$  (il lato 12 coincidente con il semiasse delle ascisse positive). Altrimenti l’orientamento della stazione 1 (vedi par. 1.4) può essere calcolato (o imposto al cerchio orizzontale) in base alla conoscenza delle coordinate dei punti 1 e R (orientamento a punto indietro) o con altre metodiche (vedi par. 1.4.7, stazione fuori centro).

Il calcolo degli angoli di direzione dei lati risulta abbastanza semplice: infatti l’angolo  $\alpha_i$  destrorso rappresenta (fig. 1.32), a meno di un angolo piatto, la variazione di direzione, per cui:

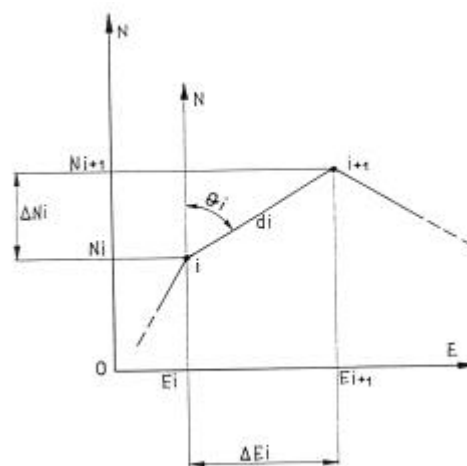
$$[1.43] \quad q = q_{i-1} + \alpha_i - 200^\circ$$

naturalmente se il risultato dell’operazione è negativo si deve aggiungere un angolo giro, mentre si deve togliere la stessa quantità se il risultato supera  $400^\circ$ .

Il calcolo delle coordinate dei vertici risulta semplice, infatti, note le distanze  $d_i$  e calcolati gli angoli di direzione  $q_i$ , per le [1.4] si ha (fig. 1.33) che:

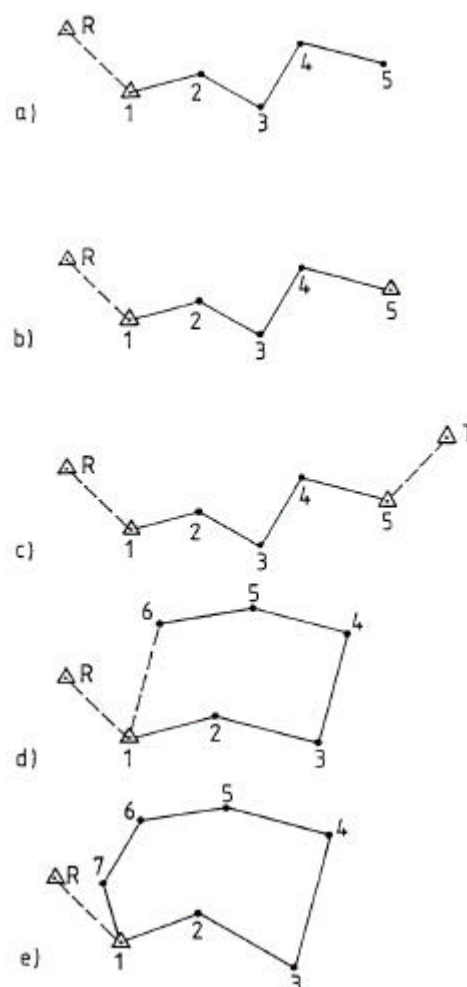
$$[1.44] \quad N_{i+1} = N_i + d_i \cos q_i \quad ; \quad E_{i+1} = E_i + d_i \sin q_i$$

**Fig. 1.33 - calcolo delle coordinate dei vertici di una poligonale**



1.4.5.3 - *Iperdeterminazioni* - Quando le misure eseguite sono in numero superiore a quelle strettamente indispensabili si parla di “iperdeterminazione” e si ha la possibilità di effettuare un controllo (individuazione di eventuali errori grossolani) e di operare una correzione delle misure per renderle congruenti alle condizioni geometriche che di caso in caso devono essere verificate (ad esempio se in un triangolo misuro i tre angoli, la loro somma deve risultare eguale ad un angolo piatto). Tale operazione di calcolo prende il nome di “compensazione” (vedi Cap. 4).

Se la iperdeterminazione riguarda le sole misure angolari, si parla di controllo angolare, mentre se le condizioni geometriche sono applicabili alle coordinate, si parla di controllo lineare. In fig. 1.34 si mostrano le tipologie più comuni di poligonali semplici, si contrassegnano con un triangolo i punti di coordinate note e i lati non misurati vengono indicati a linea tratteggiata, come si nota alcune poligonali ammettono solo controllo angolare (d) o solo controllo lineare (b), nel caso invece che siano possibili entrambi i controlli (c, e), tradizionalmente si opera prima la “compensazione” delle misure angolari e poi quella lineare.



**Fig. 1.34 - poligonali orientate: classificazione in base alle iperdeterminazioni**

- a) - aperta senza controllo
- b) - aperta con controllo parziale
- c) - aperta con controllo completo
- d) - chiusa solo angolarmente (solo controllo angolare)
- e) - chiusa (controllo completo)

Se l'ultimo angolo di direzione risulta noto (fig. 1.34 c, d, e), si può effettuare il confronto con quello calcolato mediante le [1.43], e se la differenza risulta “tollerabile” (vedi paragrafo successivo), si può procedere ad una compensazione, altrimenti si dovranno ripetere le misure angolari.

Parimenti se le coordinate dell'ultimo vertice sono note (fig. 1.34 b, c, e), allora si può effettuare un controllo delle misure, attraverso il confronto con le coordinate calcolate con le [1.44]. Se la

differenza (errore) non supera una predeterminata tolleranza, si possono compensare le misure altrimenti si dovranno ripetere.

- *Tolleranze* - Generalmente per le poligonazioni si fa riferimento alla normativa per i rilievi catastali, salvo diverse specifiche che possono essere dedotte dalla teoria degli errori (Cap. 4) e riferite a strumentazioni di predeterminata precisione.

Per gli errori angolari il D.M. del Ministero delle Finanze 19/01/88 propone la formula:

$$[1.45a] \quad t_a = 0.01^g \sqrt{n}$$

se la poligonale ha uno sviluppo lineare compreso tra i 2000 e i 5000 m, se invece la lunghezza è inferiore ai 2000 m s ha:

$$[1.45b] \quad t_a = 0.025^g \sqrt{n}$$

dove  $n$  è il numero degli angoli misurati, mentre per le coordinate l'errore tollerabile nella chiusura lineare risulta:

$$[1.46a] \quad t_l = \frac{1}{6000} \sqrt{\sum_i d_i^2} + 0.5 \text{ [m]}$$

se la poligonale è aperta e con sviluppo lineare compreso tra i 2000 e i 5000 m, e:

$$[1.46b] \quad t_l = \frac{1}{6000} \sqrt{\sum_i d_i^2} \text{ [m]}$$

se è chiusa. Se la lunghezza della poligonale risulta inferiore ai 2000 m le [1.46] possono essere sostituite dalla:

$$[1.47] \quad t_l = 0.025 \sqrt{L}$$

dove  $L$  rappresenta lo sviluppo della poligonale (somma dei lati misurati) espresso in metri.

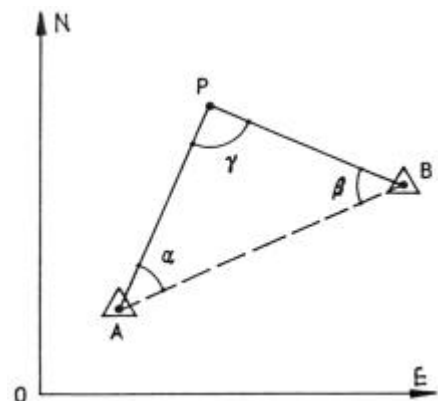
#### 1.4.6 RILIEVO PER INTERSEZIONE

Quando non si disponga di un distanziometro, o non ne sia possibile l'impiego (punti inaccessibili o fuori portata utile), si possono rilevare punti incogniti mediante sole misure angolari, partendo dalla conoscenza delle coordinate di almeno 2 punti (noti). Questi metodi, alcuni dei quali oramai desueti, possono essere ancora utilizzati con profitto in taluni casi.

- *Intersezione diretta semplice e multipla* - Note le coordinate dei punti di stazione A e B (fig. 1.35), si misurano in questi gli angoli  $a$  e  $b$ , determinando così le direzioni  $q_{ap}$  e  $q_{bp}$  (si calcola  $q_{ab}$  con le [1.24] e si sommano algebricamente le rotazioni  $a$  e  $b$  a  $q_{ab}$  e a  $q_{ba} = q_{ab} \pm 200^g$ ), le coordinate di P sono date dalle:

$$[1.48] \quad N_p = \frac{N_a \operatorname{tg} q_{ap} - N_b \operatorname{tg} q_{bp} + E_b - E_a}{\operatorname{tg} q_{ap} - \operatorname{tg} q_{bp}}$$

$$E_p = (N_p - N_a) \operatorname{tg} q_{ap} + E_a = (N_p - N_b) \operatorname{tg} q_{bp} + E_b$$



**Fig. 1.35 - intersezione in avanti**

È importante notare che, se da un punto di vista planimetrico, l'intersezione semplice in avanti appare isodeterminata (non ci sono misure sovrabbondanti), se vengono rilevati gli angoli zenitali  $\mathbf{j}_{ap}$  e  $\mathbf{j}_{bp}$  e sono note le quote dei centri dello strumento in A e B, si può determinare in doppio modo (par. 1.4.9) la quota di P e controllare così l'eventuale insorgere di errori grossolani. Se invece si vogliono imporre iperdeterminazioni anche planimetriche generalmente si procede al rilievo mediante *intersezione multipla in avanti*, intendendo che si procede alla determinazione di P a partire dalla misura delle direzioni che lo collegano a 3 o più punti noti. Il trattamento delle misure può essere operato applicando per 3 o più volte le [1.48] o applicando i metodi di calcolo proposti al Cap. 4.

Quando sia più conveniente fare stazione in P, piuttosto che sul punto B (o su A), si parla di *intersezione laterale* e, misurato  $\mathbf{g}$  (fig. 1.35), si calcola  $\mathbf{b}$  (o  $\mathbf{a}$ ) per differenza tra  $200^g$  e  $\mathbf{a} + \mathbf{g}(\mathbf{b} + \mathbf{g})$ , riportandosi al caso precedente.

- *Intersezione inversa semplice e multipla* - Se si vogliono determinare le coordinate di un punto P (fig. 1.36) nel quale si fa stazione, collimando ad almeno 3 punti noti (A,B,C), si parla di *intersezione inversa semplice* (o *multipla*), indicata nella letteratura anche come problema di POTHÉNOT o di SNELLIUS o del *vertice di piramide*. La soluzione parte dal calcolo delle distanze e degli angoli di direzione  $d_{ab}$ ,  $d_{bc}$ ,  $\mathbf{q}_{ba}$  e  $\mathbf{q}_{bc}$  mediante le [1.5], poi, per sottrazione tra gli angoli di direzione si determina l'angolo  $\mathbf{g}$  mentre  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono i valori angolari misurati in P. Volendo dapprima calcolare le ampiezze degli angoli  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{y}$ , si calcola:

$$[1.49a] \quad H = 200^g - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{g})$$

$$[1.49b] \quad \mathbf{m} = \arctg \frac{d_{ab} \operatorname{sen} \mathbf{b}}{d_{bc} \operatorname{sen} \mathbf{a}}$$

$$[1.49c] \quad K = \arctg [ \operatorname{tg} H \operatorname{tg}(50^g - \mathbf{m}) ]$$

$$[1.49d] \quad \mathbf{j} = H + K \quad ; \quad \mathbf{y} = H - K$$

si risolve quindi il triangolo ABP mediante il teorema dei seni ricavando:

$$[1.49e] \quad d_{bp} = d_{ab} \operatorname{sen} \mathbf{j} / \operatorname{sen} \mathbf{a}$$

ed essendo facile calcolare l'angolo di direzione  $\mathbf{q}_{bp}$  come somma algebrica tra  $\mathbf{q}_{ba}$  e il supplementare di  $\mathbf{a} + \mathbf{j}$ , si ricavano le coordinate di P mediante le [1.4].

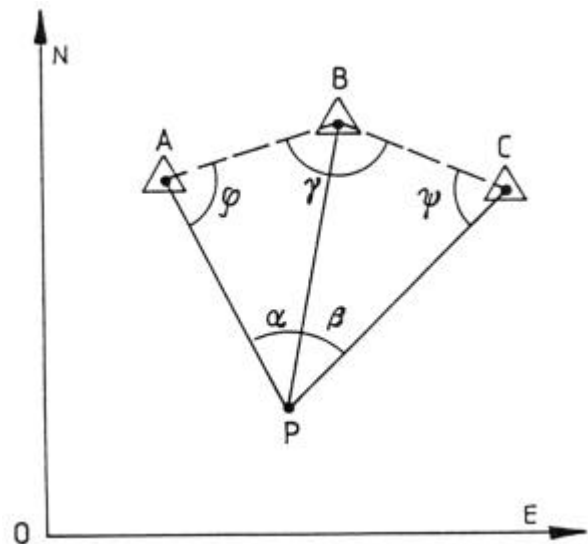


Fig. 1.36 - *intersezione inversa* (problema di SNELLIUS - POTHÉNOT)

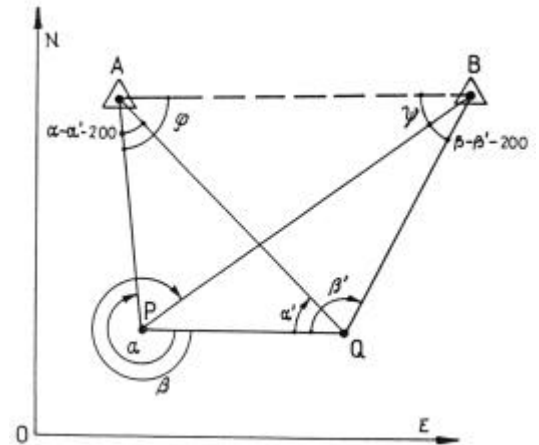
Per evitare imprecisioni si devono evitare valori troppo piccoli per gli angoli  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  (generalmente devono essere superiori a  $30^g$ , ma la miglior precisione si ha quando questi assumono valori superiori ai  $60^g$ ), mentre per un controllo dei risultati si raccomanda di iperdeterminare le misure utilizzando più di 3 punti noti. Si parla allora di *intersezione inversa multipla*. Anche in questo caso si consiglia una compensazione rigorosa (cap. 4), altrimenti si possono mediare i risultati ottenuti con le [1.49] considerando varie combinazioni di 3 punti noti per ciascun calcolo.

- *Doppia intersezione inversa* - Questo metodo di rilievo, chiamato anche problema di HANSEN, prevede la conoscenza di almeno due punti A e B (fig. 1.37) e la misura, nei punti di stazione P e Q degli angoli destrorsi  $\mathbf{a}$   $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}'$  rispettivamente. La soluzione parte dal calcolo della distanza  $d_{ab}$  e dell'angolo di direzione  $\mathbf{q}_{hb}$  mediante le [1.5]. Volendo calcolare le ampiezze degli angoli  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{y}$ , si calcola:

$$\begin{aligned}
 [1.50a] \quad & H = 100^g - \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\
 [1.50b] \quad & \mathbf{m} = \arctg \frac{\text{sen } \mathbf{a}' \text{sen}(\mathbf{b} - \mathbf{b}')}{\text{sen } \mathbf{b}' \text{sen}(\mathbf{a} - \mathbf{a}')} \\
 [1.50c] \quad & K = \arctg [\text{tg}H \text{tg}(50^g - \mathbf{m})] \\
 [1.50d] \quad & \mathbf{j} = H + K \quad ; \quad \mathbf{y} = H - K
 \end{aligned}$$

formalmente simili alle [1.72] si risolve quindi il triangolo ABP mediante il teorema dei seni [1.12] ricavando:

$$[1.50e] \quad d_{bp} = d_{ab} \text{sen}\varphi / \text{sen}(\beta - \alpha)$$

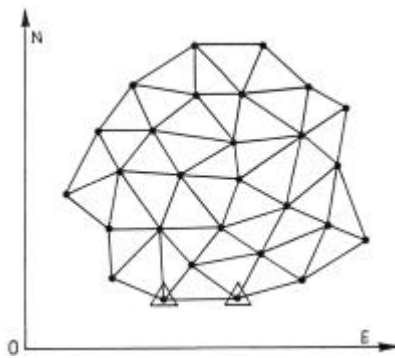


**Fig. 1.37 - doppia intersezione inversa (problema di HANSEN)**

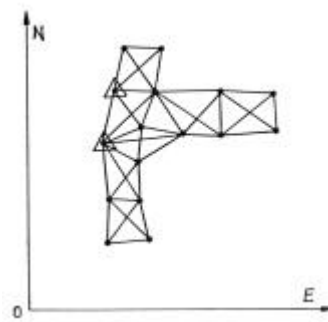
ed essendo facile calcolare l'angolo di direzione  $\mathbf{q}_{pp}$  come somma algebrica tra  $\mathbf{q}_{pa}$  e  $\mathbf{y}$ , si ricavano le coordinate di P mediante le [1.4]. Analogamente si procede per ricavare le coordinate di Q a partire dalla soluzione del triangolo ABQ i cui angoli interni sono facilmente ricavabili in base alle indicazioni fornite in fig. 1.37.

#### 1.4.7 RILIEVO PER TRIANGOLAZIONE E TRILATERAZIONE

La triangolazione è un metodo per il rilievo di precisione dei punti che si basa sulla conoscenza delle coordinate di almeno 2 di questi e su sole misure angolari, sempre iperdeterminate, in quanto si fa stazione sempre su tutti e tre i vertici delle maglie triangolari (fig. 1.38) che collegano tra loro i punti noti e quelli incogniti. La trilaterazione invece, sempre partendo da almeno 2 punti di coordinate note, sviluppa il rilievo (fig. 1.39) con maglie quadrilatere nelle quali vengono misurati i lati ed entrambe le diagonali (anche in questo caso si ha iperdeterminazione), si procede cioè per sole misure lineari.



**Fig. 1.38 - triangolazione**



**Fig. 1.39 - trilaterazione**

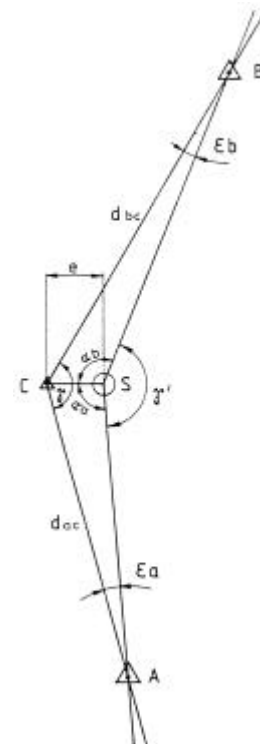
Lo sviluppo di questi metodi di rilievo è legato in modo evidente alla evoluzione delle precisioni ottenibili con i goniometri o con i distanziometri. Attualmente le trilaterazioni risultano poco praticate ed anche il campo applicativo delle triangolazioni è fortemente ristretto, in quanto, per i rilievi di grandi reti geodetiche risulta più conveniente l'impiego del G.P.S. (par. 1.4.8), mentre per i rilievi di inquadramento, disponendo di una stazione totale è conveniente misurare sia gli angoli che le lunghezze dei lati e quindi la forma delle maglie, non più necessariamente triangolare, può essere adattata alle esigenze del terreno: il rilievo così conformato, abbiamo visto (fig. 1.31c), prende il nome di rete di linee di poligonazione.

Tuttavia nel settore dei controlli di stabilità e dei collaudi statici di grandi opere di ingegneria, le triangolazioni cosiddette “tecniche”, possono ancora essere impiegate con risultati, in termini di precisione e di economicità, ancora adesso ineguagliati.

- *Esecuzione delle misure angolari* - In base alla precisione richiesta nella determinazione delle coordinate dei vertici e alle dimensioni della rete, si deve preventivamente stabilire l’entità dell’errore medio tollerabile nelle misure angolari. Si potrà quindi scegliere la strumentazione e decidere la prassi operativa più confacente al conseguimento della precisione desiderata. Si dovranno in particolare soddisfare le caratteristiche di:

- visibilità (verificabile con la [1.41]);
- precisione di centramento e di collimazione (con la [1.42]);
- precisione di misura (scelta del teodolite);
- eliminazione dell’influenza degli errori residui di rettifica (impiego della regola di Bessel);
- reiterazione delle misure (il numero di reiterazioni sarà calcolato applicando la teoria di Gauss);
- riduzione delle direzioni osservate alla corda se si opera nel “piano conforme”.

- *Stazione fuori centro* - Spesso i caposaldi delle grandi triangolazioni geodetiche, per favorire la permanenza della segnalazione dei punti, vengono stabiliti in coincidenza degli assi geometrici delle torri, dei campanili o di altri manufatti situati sulla sommità delle alture, per questa ragione i vertici trigonometrici risultano quasi sempre facilmente collimabili, ma raramente è possibile o agevole farvi stazione. Lo stesso problema si pone per riferire un rilievo di dettaglio a particolari rilevabili sul terreno (spigoli di fabbricati o di recinzioni) e la soluzione consiste nell’effettuare la stazione in un punto incognito “fuori centro”, cioè spostato planimetricamente rispetto a quello noto. Con riferimento alla fig. 1.40, facendo stazione in S, prossimo a C, si collima a quest’ultimo e ai vertici A e B, misurando gli angoli  $\alpha_a$ ,  $\alpha_b$  e  $\beta$ ; si misura inoltre, con adeguata precisione, l’eccentricità di stazione  $e$ . Essendo note, in prima approssimazione, le coordinate dei vertici A,B,C, si possono calcolare con le [1.5] le distanze  $d_{ab}$  e  $d_{bc}$  e quindi, col teorema dei seni, si possono risolvere i triangoli CBS e CAS, calcolando gli angoli  $\epsilon_a$  e  $\epsilon_b$ :



**Fig. 1.40 - stazione fuori centro**

che rappresentano le variazioni di anomalia tra le direzioni in centro e quelle in stazione. L’angolo incognito  $\beta$  sarà allora dato da una combinazione lineare tra  $\beta'$  e le due variazioni  $\epsilon_a$  e  $\epsilon_b$ , nel caso in figura:

$$[1.52] \quad \beta = \beta' - \epsilon_a - \epsilon_b$$

Per quanto riguarda il calcolo delle coordinate del punto S, esso può essere facilmente operato calcolando l’angolo di direzione  $q_s$  (facilmente ricavabile dalla conoscenza di  $q_b$  e degli angoli  $\epsilon_b$  e  $\alpha_b$ ) e impiegando le [1.4].

- *Misura delle basi* - Quando il rilievo per triangolazione non sia riferito a punti trigonometrici o comunque si voglia fare riferimento ad una distanza AB misurata (base), si pone il problema della precisione necessaria per questa determinazione. Senza entrare nel dettaglio, si può facilmente intuire come un errore relativo nella misura della base, non possa che ripercuotersi sulle dimensioni dell’intera rete, anche considerando nulla l’influenza degli errori nelle misure angolari. Per questa

ragione, se le dimensioni della rete sono n volte più grandi della base, occorre che l'errore assoluto ammissibile nella misura di questa risulti inferiore a 1/n dell'errore tollerato sull'ultimo punto della rete. Tralasciando i problemi posti in passato dalle misure di basi per le grandi reti geodetiche con dimensioni di alcuni Km, conviene richiamare alcuni metodi di misura delle distanze, quali:

- l'impiego di distanziometri elettronici (tab. 1.III)
- misura indiretta con angolo parallattico variabile (par. 1.2)

- *Sviluppo del calcolo e iperdeterminazioni* - Come si è accennato all'inizio del paragrafo, le misure sono sovrabbondanti, e quindi è necessaria una elaborazione preliminare tesa alla identificazione di eventuali errori non tollerabili (vedi par. successivo). Se non vi sono altre iperdeterminazioni si può passare al calcolo che consiste nella compensazione delle misure angolari di ciascun triangolo (mediante la sottrazione a ciascun angolo interno di un terzo dell'eccedenza i 200<sup>g</sup>), e quindi alla soluzione, col teorema dei seni, di tutti i triangoli. Infine si calcolano gli angoli delle direzioni che collegano i punti noti a tutti quelli incogniti e, con le [1.4], se ne determinano le coordinate.

Quando invece la rete contenga vertici interni (ulteriore iperdeterminazione), o presenti più di 2 vertici noti (o più di una base misurata), allora conviene operare una compensazione rigorosa (cap. 4) di tutte le misure angolari che conduca alla determinazione dei valori più probabili delle coordinate dei vertici incogniti e dell'approssimazione di queste (ellissi di errore).

- *Tolleranze* - In ogni maglia triangolare la somma degli angoli interni dovrà essere pari a 200<sup>g</sup> ± t, dove t indica la tolleranza di chiusura angolare pari a:

$$[1.53] \quad t = 3m \sqrt{3}$$

dove **m** indica lo s.q.m. (vedi cap.4) ammissibile nella misura di ciascun angolo. In tab.1.V si riportano i valori di t consentiti. Per quanto riguarda gli errori sulle coordinate il raffronto verrà effettuato tra i valori previsti nella fase di progetto del rilievo e quelli sperimentalmente determinati mediante la compensazione delle misure.

**Tab.1.V - ERRORI DI CHIUSURA TOLLERABILI NELLE TRIANGOLAZIONI**

| <b>Classificazione della rete</b> | <b>scarto q. m. su un angolo</b> | <b>tolleranza di chiusura</b> |
|-----------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|
| <b>IGMI: 1° ordine</b>            | 1 <sup>cc</sup>                  | 5 <sup>cc</sup>               |
| <b>2° ordine</b>                  | 2 <sup>cc</sup>                  | 11 <sup>cc</sup>              |
| <b>3° ordine</b>                  | 4 <sup>cc</sup>                  | 19 <sup>cc</sup>              |
| <b>Catasto : rete</b>             | 12 <sup>cc</sup>                 | 62 <sup>cc</sup>              |
| <b>sottorete</b>                  | 18 <sup>cc</sup>                 | 93 <sup>cc</sup>              |